X

26

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel und H. Hasse

Band 172

Heft 2

Ausgegeben den 8. November 1934

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1934

Band 172. Heft 2.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Schneider, Theodor, Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen I. . . .	65
— — Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen II. . . .	70
Witt, Ernst, Über die Invarianz des Geschlechts eines algebraischen Funktionenkörpers	75
Hasse, Helmut, Existenz separabler zyklischer unverzweigter Erweiterungskörper vom Primzahlgrade p über elliptischen Funktionenkörpern der Charakteristik p . . .	77
Barna, Béla, Ein Limessatz aus der Theorie des arithmisch-geometrischen Mittels . .	86
Bergmann, Stefan, Über die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande. II.	89

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 75 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg-Lahn, Behringweg 7.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10
Printed in Germany

Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen I.

Transzendenz von Potenzen.

Von *Theodor Schneider* in Frankfurt a. M.

Die Transzendenz der Zahlen ω^ϑ, wobei ω irgendeine von Null und Eins verschiedene algebraische Zahl und ϑ eine imaginärquadratische Irrationalität ist, wurde im Jahre 1929 von A. Gelfond bewiesen [1]). Im Februar 1930 zeigte C. L. Siegel in seiner Vorlesung über Zahlentheorie, daß ω^ϑ auch dann transzendent ist, wenn ϑ den Wert einer reellquadratischen Irrationalität annimmt. Unabhängig davon lieferte R. A. Kusmin hierfür einen ähnlichen Beweis [2]). Schließlich bewies K. Boehle im Jahre 1932 den Satz: Sind $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_s$ s voneinander linear unabhängige Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers s-ten Grades ($s \geqq 2$), so ist stets mindestens eine der Zahlen $\omega^{\vartheta_1}, \omega^{\vartheta_2}, \ldots, \omega^{\vartheta_s}$ transzendent, wenn ω eine beliebige von Null und Eins verschiedene Zahl ist [3])[3a]).

Durch sinngemäße Übertragung der von C. L. Siegel zum Transzendenznachweis der Werte gewisser Lösungen linearer Differentialgleichungen für algebraisches Argument entwickelten Methode [4]) auf Lösungen von anderen Funktionalgleichungen gewinnt man den allgemeineren Satz:

Es sei ω verschieden von Null und Eins und ϑ nicht rational, so ist von den drei Größen ω, ϑ, ω^ϑ [5]) mindestens eine transzendent.

Ich will diesen Satz noch in drei weiteren, einander vollkommen gleichwertigen Formulierungen aussprechen:

1. Es sei ω eine algebraische Zahl, verschieden von Null und Eins, und es sei ϑ eine algebraische Irrationalität, so ist ω^ϑ transzendent.

2. Es sei ω eine von Null und Eins verschiedene algebraische Zahl und $\omega^\vartheta = \eta$ sei algebraisch, so ist $\vartheta = \dfrac{\log \eta}{\log \omega}$ transzendent oder rational.

3. Die Logarithmen algebraischer Zahlen in bezug auf eine algebraische Basis sind transzendent oder rational.

Aus der letzten Formulierung folgt, daß insbesondere die Briggischen Logarithmen derjenigen rationalen Zahlen, die keine Potenzen von 10 sind, transzendente Werte haben.

---

[1]) Comptes Rendus **189**, p. 1224, Paris 1929.

[2]) Bulletin de l'Académie des Sciences URSS, Leningrad 1930, Nr. 6.

[3]) Mathematische Annalen **108**, p. 56, Berlin 1933.

[3a]) Am Tage der Einreichung des Manuskriptes erfuhr ich, daß der im folgenden bewiesene Satz ebenfalls von A. Gelfond gefunden und eine Skizze des Beweises bereits am 1. April 1934 veröffentlicht wurde (Sur le septième problème de D. Hilbert; Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS, Leningrad 1934, Volume II, Nr. 1, p. 1). Der Gelfondsche Beweis unterscheidet sich aber von dem meinigen in vielen Punkten wesentlich.

[4]) Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen, Abhandlungen Akad. Berlin 1929, Nr. 1.

[5]) Unter ω^ϑ sei der Wert $e^{\vartheta \log \omega}$ mit irgendeiner festen Bestimmung von $\log \omega$ verstanden.

Aus der Formulierung 1 folgt, indem man speziell ω durch $-1 = e^{i\pi}$ ersetzt, daß die Exponentialfunktion $e^{i\pi z}$ für alle irrationalen algebraischen Argumente z stets transzendente Zahlenwerte annimmt. In geometrischer Einkleidung lautet dies: Wenn in einem gleichschenkligen Dreieck das Verhältnis vom Basiswinkel zum Winkel an der Spitze algebraisch, aber nicht rational ist, so ist das Verhältnis zwischen Basis und Schenkel stets transzendent.

Der behauptete Satz stellt die vollständige Lösung eines der bekannten, von D. Hilbert im Jahre 1900 aufgestellten Probleme dar [6]).

Ich will nunmehr den Beweis des Satzes angeben. Da die bei Gelfond und den anderen Verfassern notwendigen Hilfssätze über die Verteilung der Primideale hier vollkommen herausfallen, so wird damit zugleich ein einfacherer Beweis für die bekannten Resultate gewonnen.

Man bilde eine Funktion $L_1(x) = P_{11}(x) + P_{12}(x)\omega^x + \cdots + P_{1k}(x)\omega^{(k-1)x}$; die Koeffizienten der Polynome P_{1i} $(i = 1, \ldots, k)$ vom Grade $2n - 1$ seien derart bestimmt, daß $L_1(x)$ an m^2 im folgenden Absatz angegebenen Stellen verschwindet. k, m und n seien natürliche Zahlen, die später näher fixiert werden.

Es sei ϑ eine irrationale Zahl. Man setze $[\sqrt{kn}] = m$. Dann sind die m^2 Stellen $a + b\vartheta$ $(a, b = 1, 2, \ldots, m)$ alle voneinander verschieden. Ferner ist

$$|a + b\vartheta| < \gamma_1 m \qquad (a, b = 1, 2, \ldots, m),$$

wobei γ_1 und die später auftretenden $\gamma_2, \gamma_3, \ldots$ natürliche, von k und n unabhängige Zahlen bedeuten mögen.

Aus der Bedingung des Verschwindens von $L_1(x)$ an den obigen Stellen $a + b\vartheta$ ergeben sich m^2 homogene lineare Gleichungen für die $2kn$ Koeffizienten der Polynome $P_{1i}(i = 1, 2, \ldots, k)$, die ich X_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, 2kn)$ nennen will. Die Koeffizienten der X_ν in den homogenen linearen Gleichungen seien mit $A_{\nu\mu}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m^2)$ bezeichnet. Dann ist das Gleichungssystem

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{2kn} A_{\nu\mu} X_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m^2)$$

zu lösen. Unter der Bedingung

$$(2) \qquad k^3 \leqq n$$

sind die $A_{\nu\mu}$ Polynome in $\vartheta, \omega, \omega^\vartheta$ von höchstens $(2n - 1)$-tem Grade in jeder der drei Größen. Die Zahlkoeffizienten dieser Polynome $A_{\nu\mu}$ sind ganzrational und absolut genommen kleiner als $2^{2n-1} m^{2n-1}$, und dies ist nach (2) kleiner als $\gamma_2^n n^{2n}$.

Nunmehr mache ich die Voraussetzung: Es seien $\vartheta, \omega, \omega^\vartheta$ algebraische Zahlen. Der kleinste Zahlkörper, in dem sie liegen mögen, sei ein Körper $\mathfrak{R}$ vom Grade s mit der Basis $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_s$. Durch Multiplikation mit einer geeigneten Zahl γ_3 gehen dann ϑ, ω und ω^ϑ in ganzalgebraische Zahlen über.

Also sind auch die Zahlen $\gamma_3^{6n} A_{\nu\mu}$ ganzalgebraisch. Ich multipliziere nun die Gleichungen (1) mit γ_3^{6n} und ersetze $\gamma_3^{6n} A_{\nu\mu}$ durch $a_{\nu\mu}$. Es sei für algebraisches A das Maximum der absoluten Beträge aller Konjugierten von A mit $\boxed{A}$ bezeichnet. Mithin ist

$$\boxed{a_{\nu\mu}} < \gamma_3^{6n}\, \gamma_2^n\, n^{2n}\, \gamma_4^{6n}\, N,$$

---

[6]) Mathematische Probleme, Vortrag von D. Hilbert, Gött. Nachr. 1900, p. 253.

wobei N vorübergehend die Anzahl der Glieder des Polynoms $A_{\nu\mu}$ bedeute. Es ist aber $N \leqq (2n)^3$. Damit ergibt sich

$$\boxed{a_{\nu\mu}} < \gamma_5^n n^{2n} = \beta. \tag{3}$$

Es gilt nun der

Hilfssatz 1: Das Gleichungssystem

$$y_\mu = \sum_{\nu=1}^{2kn} a_{\nu\mu} X_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m^2) \tag{4}$$

ist, wenn die $a_{\nu\mu}$ der Bedingung (3) genügen, für $y_\mu = 0$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m^2)$ lösbar in nicht sämtlich verschwindenden ganzalgebraischen Zahlen X_ν aus $\mathfrak{R}$, so daß $\boxed{X_\nu} < \gamma_6^n n^{2n}$ ist.

Beweis: Die $2kn$ Unbekannten X_ν sollen unabhängig voneinander alle ganzalgebraischen Zahlen mit der Darstellung $B_1\varrho_1 + \cdots + B_s\varrho_s$, $B_i = 0, \pm 1, \ldots, \pm h$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ durchlaufen; es gibt deren $(2h+1)^s$ voneinander verschiedene. Es ist dann

$$\boxed{X_\nu} < \gamma_7 h \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2kn). \tag{5}$$

Mittels des Gleichungssystems (4) werden dadurch $(2h+1)^{2skn}$ Systeme von Zahlen y_μ dargestellt, die nicht alle voneinander verschieden zu sein brauchen. Ferner folgt aus (4) und (5), daß

$$\boxed{y_\mu} < 2kn\gamma_7 h\beta \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m^2) \tag{6}$$

ist. Jede Zahl y_μ hat aber eine Basisdarstellung $B_1'\varrho_1 + \cdots + B_s'\varrho_s$. Eine gleiche Darstellung mit denselben B_i' $(i = 1, 2, \ldots, s)$ und mit Ersetzung der ϱ_i durch ihre Konjugierten gilt für die sämtlichen Konjugierten von y_μ. Da die $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_s$ aber eine Basis sind, kann ich dieses System von s Gleichungen nach jedem der B_i' auflösen und erhalte B_i' als linearen Ausdruck in den Konjugierten von y_μ, dessen Koeffizienten nur von $\mathfrak{R}$ abhängen. Aus (6) folgt mithin

$$|B_i'| \leqq 2kn\gamma_8 h\beta \qquad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{7}$$

Es gibt aber genau $(4kn\gamma_8 h\beta + 1)^s$ voneinander verschiedene ganze Zahlen, deren Basisdarstellung der Bedingung (7) genügt; und mithin gibt es höchstens $(4kn\gamma_8 h\beta + 1)^{sm^2}$ verschiedene Systeme $y_1, \ldots, y_{m^2}$. Ist nun

$$(4kn\gamma_8 h\beta + 1)^{sm^2} < (2h+1)^{2skn}, \tag{8}$$

so fallen zwei zu verschiedenen Systemen $X_1, X_2, \ldots, X_{2kn}$ gehörende Systeme $y_1, y_2, \ldots, y_{m^2}$ zusammen, und durch Subtraktion der ersteren voneinander erhält man eine Lösung von $y_\mu = 0$ $(\mu = 1, \ldots, m^2)$ in ganzalgebraischen Zahlen $X_1, X_2, \ldots, X_{2kn}$, die nicht sämtlich Null sind, und die nach (5) der Bedingung $\boxed{X_\nu} < 2\gamma_7 h$ genügen. Die Bedingung (8) ist aber erfüllt, wenn

$$h = \gamma_8 \beta kn \tag{9}$$

gesetzt wird. Setzt man in (9) die Bedeutung von β aus (3) ein, so erhält man

$$\boxed{X_\nu} < 2\gamma_7\gamma_8 kn\,\gamma_5^n n^{2n} < \gamma_6^n n^{2n}.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen. —

Neben $L_1(x)$ will ich noch weitere Näherungsformen aufstellen. Es sei

$$L_\sigma(x) = \Pi_\sigma(x) \cdot L_1(x + \sigma - 1) \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, k),$$

wobei $\Pi_\sigma(x) = \prod_{\substack{1 \leqq a \leqq \sigma-1 \\ 1 \leqq b \leqq m}} \{(x - a - b\vartheta)\,\gamma_3\}$ ist. Der Grad von $\Pi_\sigma(x)$ ist $m(\sigma-1)$. Dann verschwindet $L_\sigma(x)$ an denselben Stellen $a + b\vartheta$ $(a, b = 1, 2, \ldots, m)$ wie $L_1(x)$.

Definiere ich die Polynome $P_{\sigma\tau}(x)$ durch

$$P_{\sigma\tau}(x) = \Pi_\sigma(x) \cdot P_{1\tau}(x + \sigma - 1) \qquad (\sigma, \tau = 1, 2, \ldots, k),$$

so ist

$$L_\sigma(x) = \sum_{\tau=1}^{k} \omega^{(\sigma-1)(\tau-1)}\, P_{\sigma\tau}(x)\, \omega^{(\tau-1)x} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, k).$$

Es seien $P_{1\tau_1}, P_{1\tau_2}, \ldots, P_{1\tau_r}$ die sämtlichen nicht identisch verschwindenden unter den Polynomen $P_{11}, P_{12}, \ldots, P_{1k}$; dabei ist $r \leqq k$ und nach Hilfssatz 1 auch $r \geqq 1$. Bezeichne ich noch die Determinante $|\omega^{(\sigma-1)(\tau_\varrho-1)}\, P_{\sigma\tau_\varrho}(x)|$, in der σ und ϱ beide von 1 bis r laufen, durch $D(x)$, so behaupte ich in

Hilfssatz 2: Es ist $D(x)$ nicht identisch gleich Null.

Beweis: Ist g_ϱ der genaue Grad von $P_{1\tau_\varrho}$ und

$$P_{1\tau_\varrho} = c_\varrho x^{g_\varrho} + \cdots \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r),$$

dann ist die r-reihige Determinante

$$\begin{aligned} D(x) &= |\omega^{(\sigma-1)(\tau_\varrho-1)}\, \Pi_\sigma(x) \cdot P_{1\tau_\varrho}(x + \sigma - 1)| \\ &= \Pi_1(x)\, \Pi_2(x) \cdots \Pi_r(x)\, (c_1 c_2 \cdots c_r x^{g_1+g_2+\cdots+g_r}\, |\omega^{(\sigma-1)(\tau_\varrho-1)}| + \cdots), \end{aligned}$$

wo der Grad der in der Klammer nicht hingeschriebenen Glieder kleiner als $g_1 + g_2 + \cdots + g_r$ ist. Die Determinante $D(x)$ ist also sicherlich dann nicht identisch Null, wenn die Vandermondesche Determinante $|\omega^{(\sigma-1)(\tau_\varrho-1)}|$ von Null verschieden ist; diese ist aber ungleich Null, falls ω weder den Wert Null, noch den einer Einheitswurzel hat. Für den Fall, daß ω eine Einheitswurzel $\neq 1$ ist, ersetze ich im ganzen bisherigen Beweisgang die Zahlen $\omega, \vartheta, \omega^\vartheta$ durch $\omega^\vartheta, \vartheta^{-1}, \omega$; dann ist bei irrationalem ϑ die Zahl ω^ϑ bestimmt nicht Einheitswurzel. Mithin ist in jedem Falle die entsprechende Determinante $D(x)$ nicht identisch Null. —

Wenn $D(x)$ nicht identisch Null ist, wieviel Nullstellen hat es dann höchstens? — Dazu schätze ich den Grad von $D(x)$ ab. Dieser sei g. Dann ist nach (2)

$$g < 2kn + \frac{(k-1)k}{2} n < 3kn < 12\, m^2.$$

Folglich verschwindet $D(x)$ nicht an allen Stellen $a + b\vartheta$ mit $1 \leqq a \leqq 4m$, $1 \leqq b \leqq 4m$. Mit ξ sei fortan eine solche von diesen Stellen bezeichnet, für die $D(\xi) \neq 0$ ist. Folglich ist mindestens eine der r Zahlen $L_\sigma(\xi)$ von Null verschieden und $|\xi| < \gamma_9 m$. $L_\sigma(\xi)$ ist aber eine algebraische Zahl, und $L_\sigma(\xi)\gamma_3^{6n}$ ist ganzalgebraisch. Mithin ist, wenn das Zeichen N die Norm in $\mathfrak{R}$ bedeutet,

$$|N(L_\sigma(\xi)\, \gamma_3^{6n})| \geqq 1. \tag{10}$$

Fortan sei

$$m > \operatorname{Max}(\gamma_9, 2\gamma_1). \tag{11}$$

Dann hat die ganze Funktion

$$\frac{L_\sigma(z)}{\prod_{\substack{1 \leqq a \leqq m \\ 1 \leqq b \leqq m}} (z - a - b\vartheta)}$$

im Punkte $z = \xi$ nach dem Residuensatz die Darstellung

$$\frac{L_\sigma(\xi)}{\Pi(\xi - a - b\vartheta)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{L_\sigma(x)}{\Pi(x - a - b\vartheta)}\frac{dx}{x - \xi},$$

wobei C hier als Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $R = m^2$ gewählt sei. Es ist nach Hilfssatz 1:

$$\begin{aligned}\operatorname*{Max}_{|x|=m^2} |L_\sigma(x)| &< \gamma_6^n n^{2n}(\gamma_{10}m^2)^{2n-1}\, 2nk\gamma_{11}^{km^2}(\gamma_{10}m^2)^{(k-1)m} \\ &< \gamma_{12}^{k^2n} n^{5n}.\end{aligned}$$

Dieselbe Abschätzung gilt bei geeignetem γ_{12} auch für $\overline{|L_\sigma(\xi)|}$. Folglich ist:

$$\begin{aligned}|L_\sigma(\xi)| &< \gamma_{12}^{k^2n} n^{5n}(\gamma_{13}m)^{m^2}\left(\frac{m^2}{2}\right)^{-m^2} m^2 \\ &< \gamma_{14}^{k^2n} n^{-\left(\frac{k}{8}-5\right)n}.\end{aligned}$$

Mithin ergibt sich die Abschätzung:

$$\begin{aligned}|N(L_\sigma(\xi)\gamma_3^{6n})| &< \gamma_{14}^{k^2n} n^{-\left(\frac{k}{8}-5\right)n}\, \gamma_3^{6sn}\, \gamma_{12}^{(s-1)k^2n}\, n^{5(s-1)n} \\ &< \gamma_{15}^{k^2n} n^{-\left(\frac{k}{8}-5s\right)n}.\end{aligned}$$

Ist nun $\frac{k}{8} - 5s = 1$, so sind für genügend großes n die Bedingungen (2) und (11) erfüllt und die Zahl $|N(L_\sigma(\xi)\gamma_3^{6n})| < 1$. Dies ist ein Widerspruch zu (10), woraus der behauptete Satz folgt.

Eingegangen 28. Mai 1934.

Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen II.

Transzendenzeigenschaften elliptischer Funktionen.

Von *Theodor Schneider* in Frankfurt a. M.

Es sind bis jetzt nur sehr wenige Transzendenzaussagen über elliptische Funktionen bekannt. Im Jahre 1931 bewies C. L. Siegel, daß von den vier Größen $g_2, g_3, \omega_1, \omega_2$ nicht alle algebraisch sind [1]), wenn durch g_2 und g_3 die Koeffizienten in der Differentialgleichung der Weierstraßschen $\wp$-Funktion und durch ω_1 und ω_2 zwei zu dieser Funktion gehörende primitive Perioden bezeichnet werden; falls das Periodenverhältnis $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ und die Größen g_2 und g_3 algebraisch sind (z. B. im Falle der komplexen Multiplikation), folgt daraus die Transzendenz von ω_1 und von ω_2. Im Februar dieses Jahres zeigte ich in einer noch nicht gedruckten Arbeit, daß auch die vier Größen g_2, g_3, ω_1 und η_1 nicht sämtlich algebraisch sind.

Diesen Aussagen will ich in dieser Arbeit den folgenden umfassenderen Satz anreihen:

Besteht zwischen β und τ keine lineare Beziehung mit rationalen Zahlkoeffizienten, so sind die fünf Größen g_2, g_3, τ, β und $\wp(\omega_1\beta)$ nicht alle algebraisch.

Wenn die beiden Zahlen β und τ die Eigenschaft haben, daß zwischen ihnen keine (nichttriviale) lineare Gleichung mit rationalen Koeffizienten besteht, so sage ich: es sind β und τ linear unabhängig; im andern Falle nenne ich sie linear abhängig.

Mit dieser Bezeichnung spreche ich den behaupteten Satz in folgenden Fassungen aus:

1. Es seien g_2, g_3, τ und β algebraisch (z. B. sei τ imaginärquadratisch); dann ist $\wp(\omega_1\beta)$ transzendent, wenn β und τ linear unabhängig sind.

2. Es seien $g_2, g_3, \tau, \wp(\omega_1\beta)$ algebraisch; dann ist entweder β transzendent oder es sind τ und β linear abhängig, was man auch durch die Worte — es ist $\beta\omega_1$ ein rationaler Teilwert einer Periode — ausdrücken kann.

3. Man bilde ein Integral erster Gattung mit algebraischen Koeffizienten längs einer Kurve vom Geschlecht Eins mit algebraischen Zahlkoeffizienten zwischen zwei algebraischen Stellen. Der Wert des Integrals ist bei algebraischem τ entweder ein rationaler oder ein transzendenter Teil einer Periode.

Die Aussagen 1 und 2 gelten auch für eine elliptische Funktion $f(u)$ mit den Perioden ω_1 und ω_2 statt der Funktion $\wp(u)$, wenn die in der Darstellung von $f(u)$ durch $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ auftretenden Koeffizienten algebraisch sind.

---

[1]) Über die Perioden elliptischer Funktionen, J. f. Math. **167** (1932), p. 62.

Speziell ist in den vorhergehenden Sätzen auch eine Aussage über konstruierbare Teile des Lemniskatenbogens enthalten, die besagt, daß außer den schon bekannten rationalen Teilen nur noch geeignete transzendente Teile des Gesamtumfangs elementargeometrisch konstruierbar sind. — In der Formulierung 2 ist als Spezialfall ein Satz über die Nullstellen der $\wp$-Funktion enthalten. Nimmt man zu diesem Satz noch die in der Teilungstheorie der elliptischen Funktionen bewiesene Tatsache, daß im Falle der komplexen Multiplikation die $\wp$-Funktion an rationalen Periodenteilen nur in zwei Ausnahmefällen verschwinden kann, nämlich im lemniskatischen ($\tau = i, g_3 = 0$) und im äquianharmonischen Fall ($\tau = i\sqrt{3}, g_2 = 0$), so erhält man die Aussage:

Sind g_2 und g_3 algebraisch und liegt komplexe Multiplikation vor, so befinden sich die Nullstellen der $\wp$-Funktion bei Ausschluß der beiden genannten Ausnahmefälle nur an transzendenten Teilen einer Periode.

Während sich der behauptete Hauptsatz nach dem Resultat des vorstehenden Teiles I dieser Arbeit [2]) vermuten läßt, ist doch hier der Beweisgang von dem dortigen verschieden. Es ist aber leicht möglich, den hier vorzutragenden Beweis auf das dort behandelte Hilbertsche Problem zu übertragen, wobei sich sogar vieles einfacher gestaltet. Auch kann man mit dieser Beweismethode einen Satz über ganze ganzwertige Funktionen gewinnen. Ich beweise nun den behaupteten Satz.

Für ω_1 setze ich fortan ω und mache die Voraussetzung: Es seien g_2, g_3, τ, β, $\wp(\omega\beta)$ und damit auch $\wp'(\omega\beta)$ algebraisch. Die sechs Größen mögen in einem Körper $\mathfrak{K}$ vom Grade s liegen. Dann werden die sämtlichen Größen durch Multiplikation mit einer geeigneten, nur von $\mathfrak{K}$ abhängigen natürlichen Zahl γ_1 ganzalgebraisch. Ferner seien β und τ linear unabhängig. Unter $\lambda, l, \varkappa, k$ mit $\lambda \leqq l$ und $\varkappa \leqq k$ verstehe ich natürliche Zahlen. Ich behaupte nun in

Hilfssatz 1: Zu jedem l gibt es eine von Null verschiedene, in $\mathfrak{K}$ ganzalgebraische Zahl Φ_l so, daß alle Zahlen $\wp(\lambda\omega\beta)^{\varkappa-1}\,\Phi_l$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, l$; $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$) ganzalgebraisch sind und daß die Ungleichung

$$(1) \qquad \boxed{\wp(\lambda\omega\beta)^{\varkappa-1}\,\Phi_l} < \gamma_2^{l^4 \cdot 2k}\ ^{3})$$

besteht; hierbei sei γ_2, wie auch die später vorkommenden $\gamma_3, \gamma_4, \ldots$, eine nur von $\mathfrak{K}$ abhängige natürliche Zahl.

Beweis: Mittels des Multiplikationstheorems der $\wp$-Funktion läßt sich die Funktion $\wp(\lambda u)$ rational ausdrücken durch $\wp(u), \wp'(u), g_2$ und g_3 und zwar ist nach Fricke [4]):

$$(2) \qquad \wp(\lambda u) = \wp(u) - \frac{\Psi_{\lambda-1}(u)\,\Psi_{\lambda+1}(u)}{\Psi_\lambda(u)^2};$$

dabei gelten für $\Psi_\lambda(u)$ die folgenden Rekursionsformeln:

$$\Psi_1(u) = 1\,,$$
$$\Psi_2(u) = -\wp'(u)\,,$$
$$\Psi_3(u) = 3\wp(u)^4 - \tfrac{3}{2}\,g_2\wp(u)^2 - 3g_3\wp(u) - \tfrac{1}{16}\,g_2^2\,,$$
$$\Psi_4(u) = \wp'(u)\,\{2\wp(u)^6 - \tfrac{5}{2}\,g_2\wp(u)^4 - 10g_3\wp(u)^3 - \tfrac{5}{8}\,g_2^2\wp(u)^2 - \tfrac{1}{2}\,g_2g_3\wp(u) + \tfrac{1}{32}\,g_2^3 - g_3^2\}\,,$$

und allgemein gilt:

---

[2]) Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen I.

[3]) Unter $\boxed{A}$ sei für algebraisches A das Maximum der absoluten Beträge aller Konjugierten von A verstanden.

[4]) Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen, Leipzig u. Berlin 1922, Bd. II, p. 184.

$$\text{(3)}\qquad \begin{aligned} \Psi_{2\lambda+1}(u) &= \Psi_{\lambda+2}(u)\,\Psi_\lambda^3(u) - \Psi_{\lambda-1}(u)\,\Psi_{\lambda+1}^3(u) && (\lambda > 1),\\ \Psi_{2\lambda}(u)\,\Psi_2(u) &= \Psi_\lambda(u)\,\{\Psi_{\lambda+2}(u)\,\Psi_{\lambda-1}^2(u) - \Psi_{\lambda-2}(u)\,\Psi_{\lambda+1}^2(u)\} && (\lambda > 2). \end{aligned}$$

Zunächst überzeuge man sich, daß der Quotient $\Psi_{2\lambda}(u) : \Psi_2(u)$ und damit auch die Funktion $\Psi_{2\lambda}(u)$, ebenso wie $\Psi_{2\lambda+1}(u)$, ein Polynom in den vier Größen $\wp(u), \wp'(u), g_2$ und g_3 ist. Ferner folgt aus den Rekursionsformeln, daß die Koeffizienten eines jeden Polynoms $\Psi_\lambda(u)$ rationale Zahlen sind, deren Nenner ein Teiler von 2^{λ^2-1} ist. Versieht man $\wp(u), \wp'(u), g_2, g_3$ mit passenden Gewichten, indem man setzt: $\wp = c_1 t^2$, $\wp' = c_2 t^3$, $g_2 = c_3 t^4$, $g_3 = c_4 t^6$, so erkennt man leicht, daß Ψ_λ in t die Dimension $\lambda^2 - 1$ hat. Daraus folgt, daß der höchste Gesamtgrad des Polynoms $\Psi_\lambda(u)^2$ und nach (2) auch der des Polynoms $\Psi_\lambda(u)^2 \wp(\lambda u)$ in den Größen $\wp(u), \wp'(u), g_2, g_3$ kleiner ist als $2\lambda^2$. Setzt man nun für u den Zahlenwert $\omega\beta$ ein, so ist die Zahl $\Psi_\lambda(\omega\beta)$ in $\mathfrak{R}$ algebraisch; aus den vorstehenden Untersuchungen folgt aber weiter, daß $\Psi_\lambda(\omega\beta) \cdot 2^{\lambda^2-1}\gamma_1^{\lambda^2-1}$ in $\mathfrak{R}$ ganzalgebraisch ist. Nach (2) hat auch die Zahl $\wp(\lambda\omega\beta)\,\Psi_\lambda^2(\omega\beta) \cdot 2^{2\lambda^2}\gamma_1^{2\lambda^2}$ einen ganzalgebraischen Wert. Setze ich daher $\Phi_l = \prod_{\lambda=1}^{l} (\Psi_\lambda^2(\omega\beta) \cdot 2^{2\lambda^2}\gamma_1^{2\lambda^2})^k$, so ist immer $\wp(\lambda\omega\beta)^{\varkappa-1}\,\Phi_l$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l;\ \varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ ganzalgebraisch. Ausgehend von (2) und von der Unabhängigkeit von β und τ, schließt man leicht auf das Nichtverschwinden der Zahlen $\Psi_\lambda(\omega\beta)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ und damit auf das Nichtverschwinden von Φ_l. Aus dem Bestehen von (3) folgt die Richtigkeit der Beziehungen

$$\left|\Psi_{2\lambda+1}(\omega\beta)\right| \leqq \left|\Psi_{\lambda+2}(\omega\beta)\right| \cdot \left|\Psi_\lambda(\omega\beta)\right|^3 + \left|\Psi_{\lambda-1}(\omega\beta)\right| \cdot \left|\Psi_{\lambda+1}(\omega\beta)\right|^3,$$

$$\left|\Psi_{2\lambda}(\omega\beta)\right| < \gamma_3 \left|\Psi_\lambda(\omega\beta)\right| \cdot \left\{\left|\Psi_{\lambda+2}(\omega\beta)\right| \cdot \left|\Psi_{\lambda-1}(\omega\beta)\right|^2 + \left|\Psi_{\lambda-2}(\omega\beta)\right| \cdot \left|\Psi_{\lambda+1}(\omega\beta)\right|^2\right\},$$

und daraus erhält man $\left|\Psi_\lambda(\omega\beta)\right| < \gamma_4^{\lambda^3}$. Mithin ist $\left|\dfrac{\Phi_l}{\Psi_\lambda^2(\omega\beta)}\right| < \gamma_4^{2kl^4}\,(2\gamma_1)^{2kl^3}$, woraus nach (2) die Abschätzung

$$\left|\wp(\lambda\omega\beta)^{\varkappa-1}\Phi_l\right| < \gamma_4^{2kl^4}\,(2\gamma_1)^{2kl^3}\,\gamma_5^k\,\gamma_4^{2k(l+1)^3}\,(2\gamma_1)^{2k(l+1)^2} < \gamma_2^{2kl^4}$$

folgt. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Unter m, n und d seien noch näher zu bestimmende, natürliche Zahlen verstanden, zwischen denen die Beziehungen

$$4d^{60} = n = km$$

und

$$\text{(4)}\qquad 2k^2 < d^4$$

gelten. Dann mache ich die folgende Aussage in

Hilfssatz 2: Die Form

$$L(x) = P_1(x) + P_2(x)\wp(\omega x) + \cdots + P_k(x)\wp(\omega x)^{k-1},$$

wobei die $P_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ Polynome in x vom Grade $2m - 1$ seien, verschwinde an den Stellen $a + b\tau + c\beta$ mit

$$1 \leqq |a| \leqq d^{24}, \quad 1 \leqq |b| \leqq d^{24}, \quad 1 \leqq c \leqq d^{12}.$$

Dann sind die Koeffizienten X_i der Polynome $P_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ derart wählbar, daß sie nicht sämtlich verschwinden, in $\mathfrak{R}$ ganzalgebraisch sind und der Bedingung

$$\text{(5)}\qquad \left|X_i\right| < \gamma_6^m\, n^m$$

genügen.

Beweis: Es gelten für die $2n$ unbekannten Koeffizienten X_i genau n lineare homogene Gleichungen. Die Koeffizienten A_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, 2n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ dieser Gleichungen will ich untersuchen. Sie sind Polynome in β und τ vom Grade $G_1 < 2m$ und in $\wp(\omega\beta), \wp(2\omega\beta), \ldots, \wp(d^{12}\omega\beta)$ vom Grade $G_2 < k$ mit ganzrationalen Zahlkoeffizienten. Nach Hilfssatz 1 sind die Zahlen $A_{ij}\,\Phi_{d^{48}}$ in $\mathfrak{R}$ algebraisch und die Zahlen $A_{ij}\,\Phi_{d^{48}}\,\gamma_1^{4m} = a_{ij}$ sind ganzalgebraisch. Ferner schließt man aus dem obigen und aus (1), daß die folgende Ungleichung gilt:

$$\overline{|a_{ij}|} < (\gamma_7\, d^{24})^{2m}\, \gamma_2^{2kd^{48}} < \gamma_7^{2m}\, \gamma_2^{2kd^{48}}\, n^m .$$

Nach (4) ist $2kd^{48} < m$ und mithin $\overline{|a_{ij}|} < \gamma_8^m\, n^m$. Durch einen zu Hilfssatz 1 aus Teil I analogen Satz erhält man die Aussage, daß die homogenen linearen Gleichungen $\sum_{i=1}^{2n} a_{ij} X_i = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ lösbar sind in nicht sämtlich verschwindenden, in $\mathfrak{R}$ ganzalgebraischen Zahlen X_i, die der Bedingung (5) genügen.

Bis hierhin liefen die Beweise von Teil I und II parallel; nun aber werden dort vorkommende algebraische Schlüsse hier durch funktionentheoretische ersetzt werden.

Unter den Gitterpunkten des Bereiches $\mathfrak{B}(q)$ will ich die Gesamtheit der Stellen $a + b\tau + c\beta$ mit

$$1 \leqq |a| \leqq q^2, \quad 1 \leqq |b| \leqq q^2, \quad 1 \leqq c \leqq q$$

verstehen. Die natürlichen Zahlen δ und ν und die Zahl μ sollen die folgenden Bedingungen erfüllen: $\delta \geqq d$ und $4\delta^{60} = \nu = k\mu$. Aus (4) folgt dann

$$2k^2 < \delta^4. \tag{6}$$

Ich behaupte nun in

Hilfssatz 3: Ist d genügend groß gewählt, so folgt aus dem Verschwinden von $L(x)$ in $\mathfrak{B}(\delta^{12})$, daß die Funktion $L(x)$ auch an allen Stellen von $\mathfrak{B}(\delta^{13})$ den Wert Null annimmt.

Beweis: Es sei ξ irgendeine der Zahlen des Bereiches $\mathfrak{B}(\delta^{13})$. Weiterhin gibt es eine Konstante γ_9 so, daß $L(z) \cdot \prod_{|a'|<\delta^{21},\, |b'|<\delta^{24}} (\gamma_1(z - a' - b'\tau))^{2k}$ eine in dem Kreis C um den Nullpunkt mit dem Radius $R = \dfrac{1}{\gamma_9}\,\delta^{28}$ ganze Funktion ist. Die Zahl

$$L_1(\xi) = L(\xi)\, \prod (\gamma_1(\xi - a' - b'\tau))^{2k}\, \Phi_{\delta^{13}}\, \gamma_1^{4m}$$

ist nach Hilfssatz 1 ganzalgebraisch. Wenn ich also beweisen kann, daß die in $\mathfrak{R}$ gebildete Norm dieser Zahl, die ich mit $N(L_1(\xi))$ bezeichne, absolut genommen kleiner als Eins ist, dann ist mein Hilfssatz bewiesen.

Die nach Voraussetzung innerhalb von C ganze Funktion $\dfrac{L_1(z)}{\prod_{\mathfrak{B}(\delta^{13})} (z - (a + b\tau + c\beta))}$ hat nach dem Residuensatz für das Argument $z = \xi$ die Darstellung

$$\frac{L_1(\xi)}{\prod_{\mathfrak{B}(\delta^{13})} (\xi - (a + b\tau + c\beta))} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{L_1(x)}{\prod_{\mathfrak{B}(\delta^{12})} (x - (a + b\tau + c\beta))} \cdot \frac{dx}{x - \xi}; \tag{7}$$

hierbei sei C' eine aus den Mittellinien des Periodennetzes der $\wp$-Funktion gebildete Treppenkurve, die ganz innerhalb des Kreises C liegt und einen möglichst großen Flächeninhalt besitzt. Auf dieser Kurve ist die Funktion $\wp(\omega x)$ beschränkt. Ich will zunächst $L_1(x)$, wenn x ein Punkt von C' ist, abschätzen. Zu diesem Zweck über-

zeuge ich mich von der Richtigkeit der folgenden Ungleichungen. Es ist nach (5)

$$\operatorname*{Max}_{x \text{ auf } C'} |L(x)| < \gamma_6^m n^m (\delta^{28})^{2m} \gamma_{10}^k 2km < \gamma_{11}^m \nu^{2m},$$

und durch Berücksichtigung von (6) erhält man

$$\operatorname*{Max}_{x \text{ auf } C'} |\Pi(\gamma_1(x - a' - b'\tau))^{2k}| < (\gamma_{12}\delta^{28})^{4\delta^{54}\cdot 2k} < \gamma_{12}^{\mu} \nu^{\mu}.$$

Daraus ergibt sich unter Benutzung von (1) die nachstehende Ungleichung:

$$\operatorname*{Max}_{x \text{ auf } C'} |L_1(x)| < \gamma_{11}^m \nu^{2m} \gamma_{12}^{\mu} \nu^{\mu} \gamma_2^{\delta^{54}\cdot 2k} \gamma_1^{4m} < \gamma_{13}^{\mu} \nu^{3\mu}. \tag{8}$$

Dieselbe Abschätzung gilt, eventuell mit einem anderen γ_{13}, für $\overline{|L_1(\xi)|}$. Aus (7) und (8) folgt wegen $\delta \geqq d$ für hinreichend großes d

$$|L_1(\xi)| < \gamma_{13}^{\mu} \nu^{3\mu} \left(\frac{\delta^{28}}{\gamma_{14}}\right)^{-\nu} (\gamma_{15}\delta^{26})^{\nu} \gamma_{16} < \gamma_{17}^{\nu} \nu^{3\mu} \delta^{-2\nu}.$$

Durch einfache Umformung ergibt sich daraus

$$|L_1(\xi)| < \gamma_{17}^{\nu} (4\delta^{60})^{3\mu} \delta^{-2k\mu} < \gamma_{18}^{\nu} \delta^{-2\mu(k-90)}.$$

Mithin erhält man für die Norm die Abschätzung

$$|N(L_1(\xi))| < \gamma_{19}^{\mu(s-1)} \nu^{3\mu(s-1)} \gamma_{18}^{\nu} \delta^{-2\mu(k-90)} < \gamma_{20}^{\nu} \delta^{-2\mu(k-90s)}. \tag{9}$$

Setze ich nun $k = 90s + 1$, so kann ich d so groß wählen, daß aus (9)

$$|N(L_1(\xi))| < 1$$

folgt. Damit ist der Hilfssatz bewiesen. —

Jetzt komme ich zum Beweis des Hauptsatzes. Für d sollen die folgenden Bedingungen, in denen alle seitherigen auch enthalten sind, gelten: Es sei (4) erfüllt und Hilfssatz 3 gültig; ferner sei $d_1 = [d^{\frac{13}{12}}]$ größer als d und schließlich sei d die kleinste, durch k teilbare natürliche Zahl, die den vorstehenden drei Forderungen genügt. Damit sind auch die natürlichen Zahlen m und n festgelegt. Unter d_0 sei der Wert von d verstanden und es werde d_{r+1} definiert durch $d_{r+1} = [d_r^{\frac{13}{12}}]$ $(r = 0, 1, \ldots)$. Dann divergieren die Zahlwerte d_r mit wachsendem r gegen Unendlich. Verschwindet nun $L(x)$ in $\mathfrak{B}(d_r^{12})$, so ist es nach Hilfssatz 3 auch für alle Zahlwerte $a + b\tau + c\beta$ in $\mathfrak{B}(d_r^{13})$ gleich Null. Nach Definition ist aber $d_r^{13} \geqq d_{r+1}^{12}$, folglich verschwindet $L(x)$ sicher in $\mathfrak{B}(d_{r+1}^{12})$. In den Gitterpunkten des Bereiches $\mathfrak{B}(d_0^{12})$ nimmt es den Wert Null nach Konstruktion an. Durch vollständige Induktion folgt daraus, daß die Funktion $L(x)$ für alle Argumentwerte $a + b\tau + c\beta$, $1 \leqq |a|$, $1 \leqq |b|$, $1 \leqq c$ den Wert Null annimmt. Diese Stellen besitzen in der komplexen Ebene mindestens einen Häufungspunkt im Endlichen. Ferner ist $L(x)$ eine meromorphe Funktion. Es läßt sich darstellen als Quotient zweier ganzen Funktionen, und die Nullstellen der Zählerfunktion häufen sich im Endlichen. Nach einem bekannten funktionentheoretischen Satze, der durch eine einfache Überlegung zu bestätigen ist, ist dies nur möglich, wenn die im Zähler stehende ganze Funktion identisch Null ist. Also ist auch $L(x)$ identisch Null und $\wp(\omega x)$ ist eine algebraische Funktion. Dies ist ein Widerspruch, der sich nur behebt, wenn man die zu Anfang gemachte Voraussetzung, die besagt, daß die fünf Größen g_2, g_3, τ, β und $\wp(\omega\beta)$ sämtlich algebraisch sind, fallen läßt.

Eingegangen 20. Juli 1934.

Über die Invarianz des Geschlechts eines algebraischen Funktionenkörpers.

Von *Ernst Witt* in Göttingen.

In Anbetracht der großen Bedeutung, welche die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen in neuerer Zeit wieder gewonnen hat, soll hier ein kurzer Beweis für die Invarianz des (arithmetisch definierten) Geschlechts gegeben werden, gewissermaßen als ein Ersatz für § 5 der Arbeit von F. K. Schmidt [1]).

K sei ein algebraischer Funktionenkörper einer Veränderlichen, sein Konstantenkörper k sei bis auf weiteres algebraisch abgeschlossen. Mit $\mathfrak{d}_\alpha$ bezeichnen wir die Differente des als separabel angenommenen Körpers $K/k(\alpha)$, ebenso mit $\mathfrak{n}_\alpha$ den Nennerdivisor von α. $\mathfrak{p}$ sei irgendein Primdivisor von K, und π eine zugeordnete Funktion aus K, die genau einmal durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist (funktionentheoretisch gesprochen, soll π eine Ortsuniformisierende im Punkt $\mathfrak{p}$ sein). Der $\mathfrak{p}$-adische Oberkörper $K_\mathfrak{p}$ besteht aus allen Potenzreihen in π mit Koeffizienten aus k, das Ableiten nach π geschieht nach den gewöhnlichen Regeln.

Hilfssatz. *In* $K_\mathfrak{p}$ *ist* $\dfrac{d\alpha}{d\pi} = \dfrac{\mathfrak{d}_\alpha}{\mathfrak{n}_\alpha^2}$.

Beweis. Da das Verhältnis beider Seiten beim Ersetzen von α durch $\dfrac{1}{\alpha}$ oder durch α — const ungeändert bleibt, können wir (ohne Nachteil für die Allgemeinheit) annehmen, daß $\mathfrak{p}$ in α aufgeht, etwa mit dem Exponenten $e > 0$. Damit ist natürlich $\mathfrak{n}_\alpha = (1)$. Bezeichnen $\mathfrak{O}_\pi, \mathfrak{O}_\alpha$ die Ringe der ganzen Potenzreihen in π bzw. α, so ist $1, \pi, \ldots, \pi^{e-1}$ eine Basis für $\mathfrak{O}_\pi/\mathfrak{O}_\alpha$. In der eindeutigen Entwicklung $\dfrac{\pi^e}{\alpha} = g_1(\pi) + g_2(\pi)\,\alpha + \cdots$ in Polynome $g_i(\pi)$ von höchstens $(e-1)$-tem Grade ist $g_1(\pi)$ prim zu $\mathfrak{p}$.

$$G(\pi, \alpha) = \pi^e - g_1(\pi)\,\alpha - g_2(\pi)\,\alpha^2 - \cdots = 0 \tag{1}$$

ist als Gleichung e-ten Grades für π bezüglich $\mathfrak{O}_\alpha$ irreduzibel. Daher läßt sich aus ihr in gewöhnlicher Weise die Differente berechnen mit dem Resultat $\mathfrak{d}_\alpha = G_\pi(\pi, \alpha)$. (Der Index bedeutet partielle Ableitung.) Ferner ist sofort ersichtlich, daß $G_\alpha(\pi, \alpha)$ prim zu $\mathfrak{p}$ ist. Wenn wir noch α nach Potenzen von π entwickeln und in (1) einsetzen, so folgt

$$\frac{d}{d\pi} G(\pi, \alpha) = G_\pi(\pi, \alpha) + G_\alpha(\pi, \alpha)\frac{d\alpha}{d\pi} = 0, \quad \text{oder also} \quad \frac{d\alpha}{d\pi} = \mathfrak{d}_\alpha .$$

---

[1]) F. K. Schmidt, Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p, Math. Zeitschr. **33** (1931). — Für Körper der Charakteristik 0 gibt es Beweise bei Dedekind u. Weber, Theorie der algebraischen Funktionen, Crelles Journ. **92** (1882); Hensel u. Landsberg, Theorie algebraischer Funktionen, Leipzig 1902.

Zusatz bei der Korrektur: Inzwischen hat H. Hasse einen Beweis veröffentlicht, der mit meinem im wesentlichen übereinstimmt: Theorie der Differentiale in algebraischen Funktionenkörpern mit vollkommenem Konstantenkörper, dieser Band, S. 58—59.

Nun sei $K/k(\alpha)$ und $K/k(\beta)$ separabel. $F(\alpha, \beta) = 0$ sei die irreduzible Gleichung zwischen α und β. Dann ist weder $F_\alpha(\alpha, \beta)$ noch $F_\beta(\alpha, \beta)$ Null; ebensowenig können nach dem Hilfssatz $\frac{d\alpha}{d\pi}$ oder $\frac{d\beta}{d\pi}$ verschwinden. Durch Ableiten folgt

$$\frac{d}{d\pi} F(\alpha, \beta) = F_\alpha(\alpha, \beta) \frac{d\alpha}{d\pi} + F_\beta(\alpha, \beta) \frac{d\beta}{d\pi} = 0,$$

und hieraus erhalten wir

$$-\frac{F_\beta(\alpha, \beta)}{F_\alpha(\alpha, \beta)} = \frac{d\alpha}{d\pi} : \frac{d\beta}{d\pi}. \tag{2}$$

Satz. *In K ist*

$$\frac{F_\beta(\alpha, \beta)}{F_\alpha(\alpha, \beta)} = \frac{\mathfrak{d}_\alpha}{\mathfrak{n}_\alpha^2} : \frac{\mathfrak{d}_\beta}{\mathfrak{n}_\beta^2}.$$

Beweis. Wird der Hilfssatz auf die Relation (2) angewandt, so folgt die Richtigkeit des Satzes zunächst bezüglich des $\mathfrak{p}$-Beitrages. Da aber $\mathfrak{p}$ beliebig war, gilt der Satz schlechthin.

Bemerkung. Dieser Satz wird nur scheinbar allgemeiner, wenn er für irgendeinen vollkommenen statt für einen algebraisch abgeschlossenen Körper ausgesprochen wird. —

Da alle Differentialdivisoren $\frac{\mathfrak{d}_\alpha}{\mathfrak{n}_\alpha^2}$ derselben Divisorenklasse angehören, ist ihre Ordnung v und somit auch das durch $\frac{v}{2} + 1$ definierte Geschlecht des Körpers K birationalen Transformationen gegenüber invariant.

Eingegangen 10. Mai 1934.

Existenz separabler zyklischer unverzweigter Erweiterungskörper vom Primzahlgrade p über elliptischen Funktionenkörpern der Charakteristik p.

Von *Helmut Hasse* in Marburg.

Es sei K ein elliptischer Funktionenkörper [1]) mit vollkommenem Konstantenkörper k einer Primzahlcharakteristik $p \neq 2$. Wie in H. 1 sei zudem vorausgesetzt, daß K mindestens einen Primdivisor vom Grade 1 besitzt, was stets durch Übergang zu einer algebraischen Erweiterung k^* von k von endlichem Grade und dementsprechend zu $K^* = Kk^*$ erreicht werden kann.

Unter einem *p-Körper Z über K* verstehe ich im folgenden einen separabel-algebraischen Erweiterungskörper vom Grade p über K, der zyklisch und unverzweigt über K ist. Trivialerweise entspricht jedem zyklischen Erweiterungskörper $k^{(p)}$ vom Grade p des Konstantenkörpers k ein p-Körper $Z_0 = Kk^{(p)}$ über K, und über k unabhängigen $k^{(p)}$ entsprechen über K unabhängige Z_0. Ich nenne einen p-Körper Z über K *echt*, wenn er verschieden und somit auch unabhängig von den *unechten* p-Körpern Z_0 über K ist.

Die Frage der Existenz echter p-Körper Z über K hängt von einer gewissen Invariante A von K ab, die ein Element aus k ist, und die ich in § 1 aus einem ganz andersartigen Zusammenhang heraus einführen werde. In § 2 werde ich dann die folgenden Tatsachen beweisen, durch die die Frage der Existenz echter p-Körper Z über K vollständig beantwortet und gleichzeitig die Gesamtheit aller solchen Körper bestimmt wird:

Satz 1. *Damit echte p-Körper Z über K existieren, ist notwendig und hinreichend, daß*

(1) *die zu K gehörige Invariante $A \neq 0$ ist,*

(2) *A eine $(p-1)$-te Potenz in k ist.*

Satz 2. *Sind die Existenzbedingungen* (1), (2) *von Satz* 1 *erfüllt, so sind alle echten p-Körper Z über K von einem solchen Z_1 und den unechten p-Körpern Z_0 über K abhängig.*

Umgekehrt ist natürlich jeder von Z_1 und den Z_0 abhängige, aber von den Z_0 allein unabhängige Körper Z vom Grade p über K ein echter p-Körper über K.

---

[1]) Ich stütze mich nachstehend auf meine vorhergegangenen Arbeiten:

1. Abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation und Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern, Abh. Math. Sem. Hamburg **10** (1934).

2. Theorie der zyklischen algebraischen Funktionenkörper mit vollkommenem und insbesondere mit endlichem Konstantenkörper, Journ. f. Math. **172** (1934).

3. Theorie der Differentiale in algebraischen Funktionenkörpern mit vollkommenem Konstantenkörper, Journ. f. Math. **172** (1934).

Ich zitiere diese Arbeiten hier mit H. 1, H. 2, H. 3.

Besonders hervorzuheben ist der Spezialfall, daß der Konstantenkörper k algebraisch-abgeschlossen ist. Dann bleibt in Satz 1 nur die Bedingung (1), denn (2) ist dann stets erfüllt. Ferner gibt es dann keine unechten p-Körper Z_0 über K. Es gilt also speziell:

Satz 3. *Ist k algebraisch-abgeschlossen, so existiert für $A = 0$ überhaupt kein p-Körper über K, für $A \neq 0$ dagegen genau einer und zwar ein echter.*

§ 1. Die Invariante A.

Es sei $\mathfrak{O}$ wie in H. 1 ein fester Primdivisor 1. Grades von K und $y^2 = f(x)$ die zu $\mathfrak{O}$ als Nennerdivisor gehörige, aber von der Wahl von $\mathfrak{O}$ unabhängige, bis auf Homogenitätstransformationen durch K eindeutig bestimmte Normalform im Sinne von H. 1, § 3. Nach H. 1, § 4 ist dann $\frac{dx}{y} \cong 1$ ein Differential 1. Gattung von K, und zwar das wesentlich einzige solche, nämlich unabhängig von $\mathfrak{O}$ durch K als homogene Größe der Dimension 1 eindeutig bestimmt.

In der klassischen Theorie der elliptischen Funktionenkörper (k der Körper aller komplexen Zahlen) existiert ein Integral 1. Gattung u zu K, das durch die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{y} = du$$

und die zusätzliche Normierungsvorschrift

$$u \equiv 0 \mod \mathfrak{O}$$

eindeutig als homogene Größe der Dimension 1 bestimmt ist. Dies u ergibt sich durch Integration der Differentialgleichung

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{y}\frac{dx}{dt},$$

wo t eine beliebige Ortsuniformisierende zu $\mathfrak{O}$, also arithmetisch ausgedrückt ein beliebiges Primelement zu $\mathfrak{O}$ ist. Indem man in dieser Differentialgleichung rechts die formale $\mathfrak{O}$-adische Entwicklung

$$\frac{1}{y}\frac{dx}{dt} = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots, \qquad (c_0 \neq 0)$$

im Sinne von H. 3, § 1 zugrunde legt — wegen $\frac{dx}{y} \cong 1$ hat sie diese Form —, kann dieser Bestimmungsmechanismus für u allgemeiner auch für beliebige Körper k der Charakteristik 0 durchgeführt werden. Er führt zu

$$u = c_0 t + \frac{c_1}{2} t^2 + \frac{c_2}{3} t^3 + \cdots.$$

Natürlich hat das so bestimmte Element u bei dieser Allgemeinheit nicht mehr eine Bedeutung im Großen (analytische Fortsetzung), sondern nur noch eine lokale Bedeutung: u ist eine bestimmtes Element des zu $\mathfrak{O}$ gehörigen $\mathfrak{O}$-adischen Erweiterungskörpers $K_{\mathfrak{O}}$ von K. Und zwar ist u wegen $c_0 \neq 0$ ein Primelement zu $\mathfrak{O}$, und ist durch

$$\frac{1}{y}\frac{dx}{du} = 1, \qquad u \equiv 0 \mod \mathfrak{O}$$

eindeutig als homogene Größe der Dimension 1 festgelegt.

In dem hier zu betrachtenden Falle, daß k Primzahlcharakteristik p hat, versagt dieser Bestimmungsmechanismus für u wegen der bei der formalen Integration auf-

tretenden Zahlnenner. Man kann jedoch eine gewisse $\mathfrak{O}$-adische Näherungslösung der fraglichen Differentialgleichung erreichen:

Hilfssatz 1. *In K existiert ein Element u, für das*

$$\frac{1}{y}\frac{dx}{du} \equiv 1 \bmod \mathfrak{O}^{p-1}, \quad u \equiv 0 \bmod \mathfrak{O}$$

gilt; die Restklasse von u mod. $\mathfrak{O}^p$ ist hierdurch eindeutig als homogene Größe der Dimension 1 bestimmt.

Beweis. Ist wieder t ein beliebiges Primelement zu $\mathfrak{O}$ und

$$\frac{1}{y}\frac{dx}{dt} = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots, \qquad (c_0 \neq 0),$$

so erfüllt jedes Element

$$u \equiv c_0 t + \frac{c_1}{2} t^2 + \frac{c_2}{3} t^3 + \cdots + \frac{c_{p-2}}{p-1} t^{p-1} \bmod \mathfrak{O}^p$$

aus K (oder allgemeiner aus $K_{\mathfrak{O}}$) die Differentialkongruenz

$$\frac{du}{dt} \equiv \frac{1}{y}\frac{dx}{dt} \bmod \mathfrak{O}^{p-1};$$

man beachte dabei insbesondere, daß das Glied mit t^p in der $\mathfrak{O}$-adischen Entwicklung von u den Beitrag 0 zu $\frac{du}{dt}$ liefert. Wegen $c_0 \neq 0$ ist jedes solche u Primelement zu $\mathfrak{O}$, und die letztere Kongruenz gleichbedeutend mit der im Satz geforderten Kongruenz.

Erfüllt auch u_1 die im Satz genannten Kongruenzen, so folgt

$$\frac{du_1}{dt} \equiv \frac{du}{dt} \bmod \mathfrak{O}^{p-1}, \quad u_1 \equiv u \equiv 0 \bmod \mathfrak{O},$$

und daraus ohne weiteres

$$u_1 \equiv u \bmod \mathfrak{O}^p.$$

Da schließlich $\frac{dx}{y}$ nach H. 1, § 4 homogen von der Dimension 1 ist, ergibt die festgestellte Eindeutigkeit, daß auch u mod. $\mathfrak{O}^p$ homogen von der Dimension 1 ist. —

Nach Hilfssatz 1 hat man, unter Zugrundelegung von u statt t als Primelement zu $\mathfrak{O}$:

$$\frac{1}{y}\frac{dx}{du} \equiv 1 + Au^{p-1} \bmod \mathfrak{O}^p \tag{3}$$

mit einem Element A aus k. Es gilt dann:

Hilfssatz 2. *Das Element A aus k in* (3) *ist unabhängig von der Wahl von $\mathfrak{O}$ und unabhängig von der Wahl von u in seiner Restklasse mod. $\mathfrak{O}^p$ durch K allein als homogene Größe der Dimension $-(p-1)$ bestimmt.*

Beweis. Ist $u_1 \equiv u \bmod \mathfrak{O}^p$, so folgt wie vorher

$$\frac{du_1}{du} \equiv 1 \bmod \mathfrak{O}^p \qquad (\text{nicht nur mod. } \mathfrak{O}^{p-1}),$$

also

$$\frac{1}{y}\frac{dx}{du_1} = \frac{1}{y}\frac{dx}{du} : \frac{du_1}{du} \equiv \frac{1}{y}\frac{dx}{du} \bmod \mathfrak{O}^p,$$

was die Invarianz von A in (3) gegenüber der Wahl von u in seiner Restklasse mod. $\mathfrak{O}^p$ ergibt. Die Invarianz gegenüber der Wahl von $\mathfrak{O}$ folgt aus der in H. 1, § 6 festgestellten

Invarianz der Normalform $y^2 = f(x)$, die ja allein in den Bestimmungsmechanismus von u und A eingeht (siehe des näheren unten). Die Homogenität von A von der Dimension $-(p-1)$ ergibt sich dann ohne weiteres aus der festgestellten Homogenität von u von der Dimension 1. —

Zur expliziten Berechnung von A stelle man für irgendein Primelement t zu $\mathfrak{O}$ die zugehörige $\mathfrak{O}$-adische Entwicklung

$$\frac{1}{y}\frac{dx}{dt} = c_0 + c_1 t + \cdots + c_{p-2}t^{p-2} + c_{p-1}t^{p-1} + \cdots$$

mittels der Normalform $y^2 = f(x)$ aus H. 1, § 3 her. Dann ist nach obigem

$$u = c_0 t + \frac{c_1}{2}t^2 + \cdots + \frac{c_{p-2}}{p-1}t^{p-1}$$

wählbar, also

$$\frac{1}{y}\frac{dx}{du} = \frac{1}{y}\frac{dx}{dt} : \frac{du}{dt} = 1 + \frac{c_{p-1}}{c_0}t^{p-1} + \cdots = 1 + \frac{c_{p-1}}{c_0^p}u^{p-1} + \cdots,$$

d. h.

$$A = \frac{c_{p-1}}{c_0^p}.$$

Besonders einfach wird das für das Primelement

$$t = \frac{-2x}{y}.$$

Hier haben die Entwicklungen von x, y nach t die Form:

$$x = \frac{1}{t^2} + a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 + \cdots$$

$$y = \frac{-2}{t^3} + \frac{b_{-1}}{t} + b_1 t + b_3 t^3 + \cdots,$$

wie sich ohne weiteres aus der Homogenität von x, y, t und der Relation $y^2 = f(x)$ ergibt. Somit wird für dies t:

$$\frac{1}{y}\frac{dx}{dt} = 1 + c_2 t^2 + \cdots + c_{p-1}t^{p-1} + \cdots,$$

also

$$A = c_{p-1}. \tag{4}$$

Aus diesem Bestimmungsmechanismus für A läßt sich noch eine weitere Aussage über A gewinnen. Es bezeichne allgemein $E(z)$ eine aufsteigende Potenzreihe in z, deren Anfangsglied 1 ist und deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen der Normalformkoeffizienten g_1, g_2, g_3 über dem Primkörper der Charakteristik p sind. In diesem Sinne hat man zunächst:

$$t^2 = \frac{4x^2}{y^2} = \frac{4x^2}{f(x)} = \frac{1}{x}\frac{1}{E\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{x}E\left(\frac{1}{x}\right).$$

Daraus folgt weiter durch Inversion:

$$x = \frac{1}{t^2}E(t^2),$$

also eine Aussage über die obigen Koeffizienten $a_0, a_2, \ldots$ Dann ist

$$f(x) = \frac{4}{t^6} E(t^2),$$

und die Ausziehung der Quadratwurzel (mit dem schon oben festgestellten Anfangsglied $\frac{-2}{t^3}$ ergibt:

$$y = \frac{-2}{t^3} E(t^2),$$

also eine Aussage über die obigen Koeffizienten $b_{-1}, b_1, \ldots$ Ferner folgt durch Differentiation:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-2}{t^3} E(t^2).$$

Somit ergibt sich schließlich durch Division:

$$\frac{1}{y}\frac{dx}{dt} = E(t^2),$$

also eine Aussage über die obigen Koeffizienten $c_2, c_4, \ldots$, auf Grund von (4) also insbesondere:

Hilfssatz 3. *Die Invariante A ist eine ganze rationale Funktion über dem Primkörper der Charakteristik p der invarianten Koeffizienten g_1, g_2, g_3 der Normalform $y^2 = f(x)$.*

Für $p = 3$ ergibt sich leicht:

$$A = -\frac{g_1}{4}.$$

Für $p \neq 3$ hat A als Funktion von g_2, g_3 wegen der festgestellten Homogenität notwendig die folgende Struktur:

$$A = \begin{cases} \Delta^{\frac{p-1}{12}} P(J) \text{ für } p \equiv 1 \mod 12 \\ g_2 \Delta^{\frac{p-5}{12}} P(J) \text{ für } p \equiv 5 \mod 12 \\ g_3 \Delta^{\frac{p-7}{12}} P(J) \text{ für } p \equiv 7 \mod 12 \\ g_2 g_3 \Delta^{\frac{p-11}{12}} P(J) \text{ für } p \equiv 11 \mod 12, \end{cases}$$

wo $P(J)$ ein durch Angabe von p völlig bestimmtes Polynom in der absoluten Invariante

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2}$$

von K mit Koeffizienten aus dem Primkörper der Charakteristik p ist, dessen Grad jeweils *höchstens* gleich dem Exponenten der beistehenden Δ-Potenz ist. Ich vermute, daß $P(J)$ immer *genau* von diesem Grade ist. Die vorstehenden Ausführungen lassen aber noch nicht einmal erkennen, ob $P(J)$ nie identisch Null ist.

§ 2. Beweis der Sätze 1 und 2.

I. *Notwendigkeit der Existenzbedingungen* (1), (2) *in Satz* 1.

Sei Z ein echter p-Körper über K. Als separabler zyklischer Körper vom Grade p über K kann Z nach H. 2, § 2 in der Form

(5) $$Z = K(z) \text{ mit } z^p - z = v$$

erzeugt werden, wo v ein Element aus K und nicht von der Form $v_0^p - v_0$ mit v_0 aus K ist. Da ferner Z echt ist, bleibt die in K irreduzible Gleichung in (5) auch in $\bar{K} = K\bar{k}$ irreduzibel, wo $\bar{k}$ die algebraisch-abgeschlossene Hülle von k bezeichnet — anders gesagt: k ist der Konstantenkörper des algebraischen Funktionenkörpers Z —; nach H. 2, § 2 ist also v auch nicht von der Form $\bar{v}_0^p - \bar{v}_0$ mit $\bar{v}_0$ aus $\bar{K}$. Da schließlich Z unverzweigt über K ist, führt nach H. 2, § 3 das in H. 2, § 2 angegebene lokale Reduktionsverfahren für jede einzelne Primstelle $\mathfrak{P}$ von K zur Beseitigung aller gebrochenen Glieder der Partialbruchzerlegung bei $\mathfrak{P}$ (also der $\mathfrak{P}$-adischen Entwicklung) von v. Ich untersuche nun, wie weit sich in unserem Falle (K vom Geschlecht 1) dieses Reduktionsverfahren auch im Großen, d. h. simultan für *alle* Primstellen $\mathfrak{P}$ von K durchführen läßt (analog zu dem in H. 2, § 2 angegebenen Reduktionsverfahren im Großen für K vom Geschlecht 0).

Nach H. 1, § 2 ergibt sich für jeden ganzen Divisor $\mathfrak{D}$ eines Grades $\geqq 2$ von K aus dem Riemann-Rochschen Satz die Existenz eines von 1 linear-unabhängigen (also nicht konstanten) ganzen Multiplums von $\frac{1}{\mathfrak{D}}$ in K. Insbesondere folgt so für $\mathfrak{D} = \mathfrak{P}\mathfrak{O}$ bzw. $\mathfrak{D} = \mathfrak{P}$:

a) Für jeden Primdivisor $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{O}$ vom Grade 1 (und übrigens auch für $\mathfrak{P} = \mathfrak{O}$) existiert ein Element P vom genauen Nenner $\mathfrak{P}\mathfrak{O}$:

$$P \cong \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}\mathfrak{O}}, \quad \mathfrak{G} \text{ ganz und prim zu } \mathfrak{P}\mathfrak{O}.$$

(Man beachte, daß sicher kein Element vom genauen Nenner $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{O}$, also von der Ordnung 1 existiert, weil sonst K vom Geschlecht 0 wäre.)

b) Für jeden Primdivisor $\mathfrak{P}$ eines Grades > 1 existiert ein Element P vom genauen Nenner $\mathfrak{P}$:

$$P \cong \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}}, \quad \mathfrak{G} \text{ ganz und prim zu } \mathfrak{P}.$$

Die Restklassen mod. $\mathfrak{P}$ lassen sich im Falle a) durch die Elemente aus k (Konstanten) repräsentieren, im Falle b) jedenfalls durch Elemente des Integritätsbereichs I_x der in bezug auf den Integritätsbereich $k[x]$ ganz-algebraischen Elemente aus K; bekanntlich kann I_x auch als die Gesamtheit derjenigen Elemente aus K charakterisiert werden, die für alle Primstellen $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{O}$ ganz sind, also höchstens eine $\mathfrak{O}$-Potenz im Nenner haben.

Hiernach besitzt jedes Element v aus K eine Partialbruchzerlegung (im Großen) der Form:

$$v = \sum_{\mathfrak{P} \neq \mathfrak{O}} \sum_{\nu=1}^{\lambda} R_\nu P^\nu + v_0,$$

wo P jeweils ein zu $\mathfrak{P}$ gemäß a), b) bestimmtes Element ist, ferner die R_ν jeweils aus einem zu I_x gehörigen Restsystem mod. $\mathfrak{P}$ gewählt sind, und v_0 ein Element aus I_x ist. Wendet man das lokale Reduktionsverfahren aus H. 2, § 2 auf einen der Hauptteile von v an, so bleiben nach Wahl der P, R_ν die übrigen Hauptteile unbetroffen, nur der Rest v_0 (Hauptteil für $\mathfrak{O}$) wird mitbetroffen. Da dieses Verfahren für das Element v aus (5), wie schon oben gesagt, wegen der Unverzweigtheit von Z über K zur völligen Beseitigung jedes einzelnen Hauptteils führt, kann also v in (5) von vornherein als Element aus I_x angenommen werden.

Eine weitere Reduktion im Großen ergibt sich durch Anwendung des lokalen Reduktionsverfahrens für den allein verbleibenden Nennerprimteiler $\mathfrak{O}$ von v. Wegen der Unverzweigtheit ist der Nenner von v eine Potenz $\mathfrak{O}^{\nu_0 p}$ mit durch p teilbarem Exponenten. Ist nun $\nu_0 > 1$, so existiert analog zu a), b) ein Element P in K vom genauen Nenner $\mathfrak{O}^{\nu_0}$. Dann läßt sich die Konstante c (eindeutig) so bestimmen, daß das mit v gleichberechtigte, ebenfalls zu I_x gehörige Element

$$v^* = v - ((cP)^p - cP)$$

eine niedrigere $\mathfrak{O}$-Potenz im Nenner hat, die dann wegen der Unverzweigtheit wieder von der Form $\mathfrak{O}^{\nu_0^* p}$ ist, mit $\nu_0^* < \nu_0$. *Hiernach kann v in* (5) *ohne Einschränkung von vornherein als Element aus I_x vom genauen Nenner $\mathfrak{O}^p$ angenommen werden*; der Fall, daß v den genauen Nenner $\mathfrak{O}^0 = 1$ hat, also zu k gehört, scheidet aus, da dann v von der Form $\bar{v}_0^p - \bar{v}_0$ mit $\bar{v}_0$ in $\bar{K}$ (bei der getroffenen Normierung sogar in $\bar{k}$) wäre.

Eine weitere Reduktion im Großen ist wegen des Nichtvorhandenseins eines Elementes P in K vom genauen Nenner $\mathfrak{O}$ nicht möglich. Jedenfalls führt aber wegen der Unverzweigtheit die mit irgendeinem Element

$$P = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{O}\mathfrak{H}}, \quad \mathfrak{G} \text{ und } \mathfrak{H} \text{ ganz und prim zu } \mathfrak{O},$$

angesetzte lokale Reduktion bei $\mathfrak{O}$ zur völligen Beseitigung von $\mathfrak{O}$ aus dem Nenner von v (unter gleichzeitigem Auftreten neuer Nenner), d. h. die $\mathfrak{O}$-adische Entwicklung von v beginnt so:

$$v \equiv c^p P^p - cP \text{ mod. } \mathfrak{O}^0 \text{ mit } c \neq 0 \text{ aus } k.$$

Insbesondere kann hier $P = \frac{1}{u}$ gewählt werden, wo u die Bedeutung aus § 1 hat. Dann hat man also:

$$v \equiv \frac{c^p}{u^p} - \frac{c}{u} \text{ mod. } \mathfrak{O}^0 \text{ mit } c \neq 0 \text{ aus } k. \tag{6}$$

Ich wende jetzt den in H. 3, §§5, 6 bewiesenen Residuensatz auf das Differential $v\frac{dx}{y}$ an. Da v genau den Nenner $\mathfrak{O}^p$ hat und $\frac{dx}{y} \cong 1$ ist, hat auch $v\frac{dx}{y}$ genau den Nenner $\mathfrak{O}^p$, und daher sind die Residuen dieses Differentials nach H. 3, § 2 für alle Primstellen $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{O}$ Null. Nach dem Residuensatz ist daher auch das Residuum bei $\mathfrak{O}$ Null. Dieses Residuum berechnet sich nach H. 3, § 2 als der Koeffizient von $\frac{1}{u}$ in

$$v\frac{1}{y}\frac{dx}{du} \equiv \left(\frac{c^p}{u^p} - \frac{c}{u}\right)(1 + Au^{p-1}) \text{ mod. } \mathfrak{O}^0 \text{ (nach (6) und (3))}$$

$$\equiv \frac{c^p}{u^p} + \frac{Ac^p - c}{u} \text{ mod. } \mathfrak{O}^0,$$

also als $Ac^p - c$. Es ergibt sich also die Tatsache:

$$Ac^p = c \text{ mit } c \neq 0 \text{ aus } k,$$

d. h.

$$A = \left(\frac{1}{c}\right)^{p-1} \text{ mit } c \neq 0 \text{ aus } k.$$

Damit ist das Erfülltsein der Bedingungen (1), (2) aus Satz 1 festgestellt.

II. *Hinreichen der Existenzbedingungen* (1), (2) *in Satz* 1.

Ich konstruiere unter Voraussetzung der Bedingungen (1), (2) aus Satz 1 ein Element v aus I_x mit der Eigenschaft (6).

Dazu bezeichne D die Differentialoperation $y\frac{d}{dx}$. Aus

$$Dx = y, \quad Dy = y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}f'(x)$$

und den formalen Differentiationsregeln folgt, daß D Elemente aus dem Integritätsbereich I_x (mit der Basis $1, y$ über $k[x]$) stets wieder in Elemente aus I_x überführt. Insbesondere gehören also die Elemente

$$v_2 = x, \; v_3 = Dv_2, \ldots, v_p = Dv_{p-1}$$

sämtlich zu I_x. Ferner hat man unter Benutzung des Primelements u aus § 1 zur $\mathfrak{O}$-adischen Entwicklung:

$$(7)\quad \begin{cases} v_2 = x \equiv \dfrac{1}{u^2} & \text{mod. } \mathfrak{O}^0 \text{ (folgt leicht aus § 1)} \\ v_3 = \dfrac{dv_2}{du}\, y\dfrac{du}{dx} \equiv -\dfrac{2!}{u^3} & \text{mod. } \mathfrak{O}^0 \\ \cdots\cdots\cdots\

die Eigenschaft (6) haben, daß also genau diese v zu I_x gehörige Elemente mit der Eigenschaft (6) sind. Aus den bereits geführten Beweisen geht aber hervor, daß die v aus I_x mit der Eigenschaft (6) *alle* echten p-Körper über K nach dem Schema (5) liefern. Somit erhält man die Gesamtheit aller echten p-Körper Z über K, wenn man v in (5) die Gesamtheit der Elemente (8) durchlaufen läßt.

Diese Gesamtheit stellt sich in der Form

$$v = \varkappa v_1 + c_0, \qquad (\varkappa = 1, \ldots, p-1)$$

dar, wo

$$v_1 = c_1^p v_p, \qquad \left(c_1^{p-1} = \frac{1}{A}\right)$$

ein spezielles solches Element ist. Da allgemein der $v = v_1 + v_2$ entsprechende Körper Z von den v_1 und v_2 entsprechenden Körpern Z_1 und Z_2 abhängig ist, besagt dies, daß alle echten p-Körper Z von einem solchen (v_1 entsprechenden) Z_1 und den ($v_0 = c_0$ entsprechenden) unechten p-Körpern Z_0 abhängig sind (wobei natürlich c_0 auf solche Elemente aus k zu beschränken ist, die nicht von der Form $c^p - c$ mit c aus k sind).

Eingegangen 8. Mai 1934.

Ein Limessatz aus der Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels.

Von *Béla Barna* in Debrecen (Ungarn).

Wir bezeichnen mit $\overline{M}(1, z)$ denjenigen Zweig der unendlich vieldeutigen Grenzfunktion $M(1, z)$ des arithmetisch-geometrischen Mittels ausgehend von den Anfangselementen 1 und z, für den [1])

$$|\overline{M}(1, z)| \geqq |M(1, z)|.$$

Es ist bekannt, daß $\overline{M}(1, z)$ in der längs der negativ-reellen Achse aufgeschnittenen z-Ebene eine eindeutige regulär-analytische Funktion ist, und daß die Funktionalgleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \overline{M}(1, z) = \overline{M}(z, 1), & \eta\,\overline{M}(1, z) = \overline{M}(\eta, \eta z), \\ \overline{M}(1, z) = \overline{M}(1 + \sqrt{1 - z^2},\ 1 - \sqrt{1 - z^2}) \end{cases}$$

gelten [2]), wo in der letzten Gleichung $\Re(z) > 0$ ist und von den zwei Werten der Quadratwurzel immer derselbe zu nehmen ist.

Es ist bekanntlich

$$(2) \qquad \lim_{z \to 0} \overline{M}(1, z) \log \frac{1}{z} = \frac{\pi}{2}.$$

Die Methoden, die zu dieser merkwürdigen Gleichung geführt haben, stehen mit der Theorie der elliptischen Integrale bzw. gewissen Differentialgleichungen in Verbindung. Ein elementarer Beweis rührt von Herrn H. Geppert her [3]).

Im folgenden beweise ich diesen Limessatz gleichfalls elementar für beliebiges komplexes z.

Zunächst beweise ich den folgenden Satz:

Im Innern der längs der negativ-reellen Achse aufgeschnittenen Ebene gilt die Gleichung (2).

Mit (α) bezeichnen wir einen Winkelraum in der Zahlenebene von der Maßzahl α, der den Scheitel im Nullpunkt und die positiv-reelle Achse als Halbierungslinie hat. Wir benötigen den folgenden Hilfssatz:

Voraussetzung: Es gibt einen Winkelraum (α), mit $0 < \alpha \leqq \pi$, in dessen Innerem die Gleichung (2) gilt.

Behauptung: Im Innern der längs der negativ-reellen Achse aufgeschnittenen z-Ebene besteht die Gleichung (2).

---

[1]) Siehe L. von Dávid, Arithmetisch-geometrisches Mittel und Modulfunktion, dieses Journal Bd. **159** (1928), S. 157.

[2]) Siehe v. Dávid, l. c. S. 162.

[3]) Gauß-Geppert, Bestimmung der Anziehung eines elliptischen Ringes, Ostwalds Klassiker, Leipzig 1927, S. 200.

Beweis: Nehmen wir z. B. denjenigen Wert von $\sqrt{1-z^2}$, für den $\Re(\sqrt{1-z^2}) \geqq 0$ ist, so sind

$$\tau(z) = \frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}, \quad \zeta(z) = [\tau(z)]^2, \quad t(z) = \frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z^2}$$

in der Umgebung von 0 eindeutige, regulär-analytische Funktionen mit $\tau(0) = 0$, $t(0) = \frac{1}{2}$. Wegen $\alpha \leqq \pi$ gelten die Gleichungen (1) für alle z im Innern von (α). Man schließt hieraus:

$$t(z)\, \overline{M}(1, z) = \overline{M}(1, \zeta(z)),$$

woraus — wenn man mit

$$\log z = \log \tau(z) + \log(1 + \sqrt{1-z^2})$$

multipliziert und etwas umordnet — folgt:

$$2t(z)\overline{M}(1, z) \log z - 2\overline{M}(1, \zeta(z)) \log (1 + \sqrt{1-z^2}) = \overline{M}(1, \zeta(z)) \log \zeta(z).$$

Geht also $z \to 0$ im Innern von (α), so besteht die Gleichung

$$\begin{aligned} (3) \qquad & \lim \{2t(z)\, \overline{M}(1, z) \log z - 2\overline{M}(1, \zeta(z)) \log (1 + \sqrt{1-z^2})\} \\ & = \lim \overline{M}(1, \zeta(z)) \log \zeta(z) = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Da $\tau'(0) = \frac{1}{2} \neq 0$ ist, werden die Schenkel von (α) durch die Funktion $\tau(z)$ so abgebildet, daß die ihnen entsprechenden Linien im Punkt $\tau = 0$ einen Winkel von der Größe α bilden. Wenn also z im Innern des Winkelraumes (α) gegen 0 strebt, nähert sich $\zeta = \tau^2$ im Innern des Winkelraumes (2α) in der ζ-Ebene dem Punkt 0. Nach (3) ist also für diesen Winkelraum

$$\lim_{\zeta \to 0} \overline{M}(1, \zeta) \log \zeta = -\frac{\pi}{2}.$$

Wir können daher sagen: Wenn im Innern von (α) die Gleichung (2) gilt, so ist sie auch im Innern des Winkelraumes (2α) richtig. Durch wiederholte Anwendung dieses Ergebnisses gelangen wir zu einem Winkelraum (α) mit $\alpha \geqq \pi$, der also den Winkelraum (π) enthält. Für diesen ist noch die vorige Verdoppelung anzuwenden, und wir bekommen im Innern des Winkelraumes (2π), d. h. im Innern der längs der negativ-reellen Achse aufgeschnittenen z-Ebene, die Gleichung (2).

Nun ist noch zu beweisen, daß ein Winkelraum (α) existiert, der der Voraussetzung des Hilfssatzes genügt. Aus den Reihenentwicklungen [4])

$$-\frac{1}{\pi} \log (1-\lambda) = \sum_1^\infty \frac{1}{\pi n} \lambda^n,$$

$$\frac{-1}{\overline{M}(1, \sqrt{1-\lambda})} = -1 - \sum_1^\infty p_n^2 \lambda^n,$$

wo $|\lambda| < 1$, $\quad p_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots \quad 2n}$, folgt:

$$-\frac{1}{\pi} \log (1-\lambda) - \frac{1}{\overline{M}(1, \sqrt{1-\lambda})} = -1 + \sum_1^\infty \left(\frac{1}{\pi n} - p_n^2\right) \lambda^n;$$

---

[4]) Siehe v. Dávid, l. c. S. 163.

man kann ferner mit Hilfe der Ungleichungen

$$2n\,p_n^2 < \frac{2}{\pi} < p_n^2\,(2n+1)$$

zeigen, daß die Reihe

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{\pi n} - p_n^2\right) = S$$

konvergiert. Bezeichnen wir mit (β) einen Winkelraum mit der Maßzahl $\beta < \pi$, der den Scheitel im Punkt 1 und die Gerade $(-\infty, 1)$ als Halbierungslinie hat, so erhalten wir — nach einem bekannten Abelschen Satze —

$$\lim_{\lambda \to 1} \left[-\frac{1}{\pi}\log(1-\lambda) - \frac{1}{\overline{M}(1, \sqrt{1-\lambda})}\right] = -1 - S,$$

wenn λ im Winkelraum (β) nach dem Punkt 1 konvergiert. Aus dieser Gleichung folgt, daß in der Ebene von $z = \sqrt{1-\lambda}$ mit $\Re(\sqrt{1-\lambda}) \geqq 0$ der Winkelraum (α), für den $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ist, der Voraussetzung des Hilfssatzes genügt.

Wir können noch mehr sagen:

Es gilt die Gleichung (2) *auch dann, wenn z eine negativ-relle Veränderliche ist.*

Bezeichnen wir mit ε eine positiv-reelle Veränderliche, so gibt es zwei konjugiert komplexe $\overline{M}(1, -\varepsilon)$-Werte, nämlich [5])

$$\overline{M}(1, -\varepsilon) = \frac{1-\varepsilon}{2}\,\overline{M}(1, \pm\delta), \tag{4}$$

wo $\delta = \frac{2i\sqrt{\varepsilon}}{1-\varepsilon}$ rein imaginär ist. Aus (4) — wenn man mit

$$\log\left(\frac{1}{-\varepsilon}\right) = -2\log(\pm\delta) - 2\log\frac{1-\varepsilon}{2}$$

multipliziert — bekommen wir

$$\overline{M}(1, -\varepsilon)\log\left(\frac{1}{-\varepsilon}\right) = (\varepsilon-1)\,\overline{M}(1, \pm\delta) + (\varepsilon-1)\,\overline{M}(1, \pm\delta)\log\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right), \tag{5}$$

wo wir gleichzeitig das obere oder das untere Vorzeichen nehmen. Nach dem Vorigen haben wir

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left[(\varepsilon-1)\,\overline{M}(1, \pm\delta)\log(\pm\delta)\right] = \frac{\pi}{2}$$

und

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left[(\varepsilon-1)\,\overline{M}(1, \pm\delta)\log\frac{1-\varepsilon}{2}\right] = 0,$$

wodurch aus (5) die Gleichung

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\overline{M}(1, -\varepsilon)\log\frac{1}{-\varepsilon} = \frac{\pi}{2}$$

folgt.

---

[5]) Siehe v. Dávid, l. c., S. 157.

Eingegangen 21. April 1934.

Über die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande. II.

Von *Stefan Bergmann* in Tomsk

Eine Gesamtheit der durch Paare von Funktionen zweier komplexer Variablen $z_1^* = z_1^*(z_1, z_2)$, $z_2^* = z_2^*(z_1, z_2)$ auf einander abbildbarer Gebiete bezeichnen wir als eine *Klasse von äquivalenten Gebieten.*

Beschränkt man sich auf Klassen, zu denen mindestens ein ganz im Endlichen gelegenes, schlichtes Gebiet gehört, und betrachtet man in einem solchen Gebiete $\mathfrak{B}$ die Gesamtheit der in ihm regulären Funktionen $h(z_1, z_2)$, für die

$$\int_{\mathfrak{B}} |h(z_1, z_2)|^2 \, d\omega \leqq 1 \qquad (d\omega = dx_1 dy_1 dx_2 dy_2)$$

gilt, so besitzen die Quadrate der Beträge der h in jedem Punkte $\{t_1, t_2\}$ von $\mathfrak{B}$ ein Maximum, welches eine in $\mathfrak{B}$ positive und analytische [1]) Funktion $\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(t_1, t_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)$ definiert. Es gibt zu jedem Punkt $\{t_1, t_2\}$ eine und (bis auf einen Faktor vom Betrage eins) nur eine Funktion, für die dieses Maximum erreicht wird. Dividiert man diese Funktion zwecks Normierung durch $\sqrt{\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(t_1, t_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)}$, so nimmt die auf diese Weise gewonnene Funktion $\mathsf{M}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; t_1, t_2)$ im Punkte $\{t_1, t_2\}$ den Wert eins an und erteilt dem Integral $\int_{\mathfrak{B}} |h|^2 \, d\omega$ den Minimalwert, wenn zur Konkurrenz alle in $\mathfrak{B}$ regulären Funktionen $h(z_1, z_2)$ herangezogen werden, für die $|h(t_1, t_2)| = 1$ gilt. $\mathsf{M}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; t_1, t_2) = \dfrac{\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)}{\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(t_1, t_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)}$ wird als die Minimalfunktion des Bereiches $\mathfrak{B}$ mit dem Aufpunkt in $\{t_1, t_2\}$ bezeichnet [2]).

Die Hermitesche Differentialform

$$[1.16] \qquad ds^2 = \sum_{m,n=1}^{2} \mathsf{T}_{m\bar{n}} \, dz_m \, d\bar{z}_n , \qquad \mathsf{T}_{m\bar{n}} = \frac{\partial^2 \log \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}}{\partial z_m \, \partial \bar{z}_n}$$

[1]) Unter einer analytischen Funktion $p(z_1, z_2; t_1, t_2)$ verstehen wir eine Funktion der vier Veränderlichen z_1, z_2, t_1, t_2, die sich in der Umgebung jedes Regularitätspunktes in einem genügend kleinen Polyzylinder $|z_k| \leqq \delta_k$, $|t_k| \leqq \delta_k$ in eine gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln läßt.

[2]) Vgl. dazu „Über unendliche Hermitesche Formen, die zu einem Bereiche gehören, nebst Anwendungen auf Fragen der Abbildung durch Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen", Math. Zeitschr. **29** (1929), S. 641 bis 677, insbesondere § 1, im folgenden als Arbeit H zitiert.

In der vorliegenden Arbeit bezeichnen wir die Minimalfunktion von $\mathfrak{B}$ mit dem Aufpunkt in $\{t_1, t_2\}$ mit $\mathsf{M}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; t_1, t_2)$ und nicht mit $\mathsf{M}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)$, wie dies in den früheren Arbeiten geschehen ist. Für die Kernfunktion behalten wir dagegen die alte Bezeichnung $\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)$ bei, da sie eine antianalytische Funktion in t_1, t_2 ist.

ist gegenüber Transformationen durch Paare von Funktionen zweier komplexer Veränderlicher invariant [3]). Die Maßbestimmung [1. 16] ist positiv definit [4]) und besitzt die Eigenschaft, daß in dem zugehörigen Riemannschen Raume die (durch [1. 17] gegebene) Invariante $\boldsymbol{I}$ auftritt, wobei zwischen dem verjüngten Krümmungstensor, dem Fundamentaltensor und den kovarianten Ableitungen von $\boldsymbol{I}$ die Relation

$$[1.\,18] \qquad \mathsf{T}_{m\bar{n}} + \sum_{p=1}^{2} R_{\bar{n}mp}^{\cdots\,p} = \frac{\partial^2 \log \boldsymbol{I}}{\partial z_m \partial \bar{z}_n}$$

besteht.

Den Riemannschen Raum, der durch die Maßbestimmung [1. 16] *in einer Klasse von äquivalenten Gebieten definiert ist*, wollen wir als *den Urraum der* betreffenden *Klasse* bezeichnen.

Im Falle *einer* komplexen Variablen bei ganz im Endlichen gelegenen einfach zusammenhängenden Bereichen $\mathfrak{B}^2$ ist $\mathsf{M}_{\mathfrak{B}^2}(z;t)$ die Ableitung der (entsprechend normierten) Kreisabbildungsfunktion, die den Punkt $\{t\}$ in den Kreismittelpunkt überführt. Die Differentialform $ds^2 = \dfrac{\partial^2 \log \mathsf{K}_{\mathfrak{B}^2}(z,\bar{z})}{\partial z\,\partial \bar{z}}\,|dz|^2$ geht hierbei in die Poincarésche Maßbestimmung des Einheitskreises über.

Es sei vielleicht bemerkt, daß die Einführung des Urraumes eine interessante Folgerung gestattet: Jeder Bereich $\mathfrak{B}$ der Klasse kann dadurch gewonnen werden, daß man im Urraume die zu $\mathfrak{B}$ gehörigen (kartesischen) Koordinaten z_1, z_2 einführt. Diese Tatsache erlaubt, die Ergebnisse der Differentialgeometrie in der Theorie der Abbildung durch Paare von Funktionen zweier komplexer Variablen zu verwerten. Insbesondere folgt daraus, daß bei der Abbildung der Gebiete auf einander gewisse Größen auftreten, nämlich Invarianten (Skalare), Integralinvarianten (Dichten), Tensoren usw., die sich beim Übergang von $\mathfrak{B}$ zu einem anderen Gebiete $\mathfrak{B}^*$ der Klasse in einer ganz bestimmten Weise transformieren. (Im Sinne unserer Auffassung bedeutet der Übergang von $\mathfrak{B}$ zu $\mathfrak{B}^*$, daß wir im Urraume von den Koordinaten z_1, z_2 zu neuen Koordinaten z_1^*, z_2^* übergehen.)

Eines von den wichtigen Problemen der Funktionentheorie besteht in der Untersuchung der in einer Klasse von Gebieten definierten analytischen Funktionen zweier komplexer Veränderlicher. Zieht man zu diesem Studium die angegebene Maßbestimmung heran, so treten vor allem die Fragen der in der Funktionentheorie vorkommenden Urräume und die Charakterisierung der zu einem Urraum zugehörigen Gebiete auf.

---

[3]) Vgl. dazu „Über die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande. I", Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik **169** (1933), S. 1—42, insbesondere § 1, im folgenden als K zitiert; die aus ihr entnommenen Formeln werden durch eckige Klammern gekennzeichnet. Siehe auch „Über eine in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen auftretende unitäre Geometrie", Proc. Akad. v. Wet. Amsterdam **36** (1933), S. 307—313, und „Sur quelques propriétés des transformations par un couple de fonctions de deux variables complexes", Rend. d. R. Accad. naz. d. Lincei (6) **19** (1934), S. 474—478.

[4]) Im § 1 von K wurde gezeigt, daß die Determinante N der Differentialform [1. 16] überall in $\mathfrak{B}$ positiv ist, woraus nur folgt, daß die Form definit ist. Man schließt aber ähnlich (wie bei dem Beweis der Positivität von N), daß

$$\mathsf{T}_{1\bar{1}} = \frac{\begin{vmatrix} \mathsf{K} & \mathsf{K}_{00\bar{1}\bar{0}} \\ \mathsf{K}_{1000} & \mathsf{K}_{10\bar{1}\bar{0}} \end{vmatrix}}{\mathsf{K}^2} = \frac{1}{2\mathsf{K}^2} \sum_{\varkappa} \sum_{\mu} \left\| \begin{matrix} \varphi_\varkappa(z_1,z_2) & \dfrac{\partial \varphi_\varkappa(z_1,z_2)}{\partial z_1} \\ \varphi_\mu(z_1,z_2) & \dfrac{\partial \varphi_\mu(z_1,z_2)}{\partial z_2} \end{matrix} \right\|^2 > 0, \qquad \mathsf{K}_{mn\bar{p}\bar{q}} \equiv \frac{d^{m+n+p+q}\,\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1,z_2;\bar{z}_1,\bar{z}_2)}{dz_1^m\,dz_2^n\,d\bar{z}_1^p\,d\bar{z}_2^q}$$

und $\mathsf{T}_{2\bar{2}} > 0$ ist, woraus auch die Positivität der Form folgt. Auf der Seite 5, Zeile 12 oben, soll es übrigens nicht

$$N = \frac{1}{6} \sum\sum\sum |D_{\nu\mu\varkappa}(z_1,z_2)|^2, \quad \text{sondern} \quad N = \frac{1}{6\,\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}^3} \sum\sum\sum |D_{\nu\mu\varkappa}(z_1,z_2)|^2 \text{ heißen.}$$

Die vorliegende Arbeit liefert gewisse Beiträge zu diesen Problemen, indem sie einige Aussagen über die Verhältnisse am Rande macht. Sie stützt sich in weitem Maße auf die Ergebnisse von K. Wie dort gezeigt ist, wird — unter gewissen natürlichen Voraussetzungen über die Struktur des Bereiches — die Kernfunktion bei der Annäherung an den Rand ihres Definitionsgebietes unendlich. Die Ordnung des Unendlichwerdens kann jedoch in verschiedenen Punkten des Randes verschieden sein. Es wurden dementsprechend in K Randpunkte nullter, zweiter, dritter und vierter Ordnung eingeführt. In jeder Klasse dieser Randpunkte läßt sich eine Unterklasse von Punkten von einer besonders einfachen Struktur aussondern, die als Limespunkte bezeichnet werden. Um die funktionentheoretischen Eigenschaften eines Limespunktes Q zweiter und dritter Ordnung übersichtlicher formulieren zu können, ist es zweckmäßig, die sogenannten in Bezug auf Q normalen Koordinaten einzuführen. Gemäß den Voraussetzungen über Q besitzt die Randhyperfläche von $\mathfrak{B}$ in Q die Tangentialhyperebene $\mathfrak{e}^3$. Die in bezug auf Q normalen Koordinaten werden dadurch gewonnen, daß man Q zu dem Koordinatenanfangspunkt macht und die durch den Punkt Q gehende in $\mathfrak{e}^3$ liegende analytische Ebene $\mathfrak{C}^2$ bzw. die zu $\mathfrak{C}^2$ orthogonale als z_1- bzw. z_2-Ebene wählt [5]). Bei gewissen Arten von Annäherungen an Q, die in K näher besprochen sind, existiert, wie in K gezeigt wurde,

$$\lim_{\{z_1, z_2\} \to Q} (z_1 + \bar{z}_1)^m \, K_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2), \qquad m = 2, 3.$$

Eine dort zum Beweis dieser Limesrelation angewandte Methode, die in der vorliegenden Arbeit weiter ausgebaut wird, möge hier dadurch illustriert werden, daß wir eine entsprechende Betrachtung im Falle einer komplexen Veränderlichen durchführen. Sei $\mathfrak{B}^2$ ein konvexer Bereich, Q einer seiner Randpunkte, wobei die Berandungskurve in Q eine positive Krümmung besitze. Wir werden unter den in bezug auf Q normalen Koordinaten jetzt solche Koordinaten verstehen, für die Q zum Koordinatenanfangspunkt und die innere Normale in Q zu der positiven x-Achse wird. Seien $\mathfrak{J}^2$ und $\mathfrak{A}^2$ zwei Kreise, die die y-Achse im Punkte Q berühren, wobei $\mathfrak{J}^2$ (innerer Vergleichskörper) $\mathfrak{B}^2$ enthält. Die Kernfunktion eines Kreises $\mathfrak{K}^2$ von Radius r, der die y-Achse in Q berührt, hat (in den in bezug auf Q normalen Koordinaten) den Wert $\dfrac{1}{\pi\left(z + \bar{z} + \dfrac{|z|^2}{r}\right)^2}$. Geschieht die Annäherung an Q in dem Winkelgebiete $\mathfrak{W}_\alpha^2$: $\dfrac{2\,|z_1|}{z_1 + \bar{z}_1} < \dfrac{1}{\cos\alpha}$, $|\alpha| < \dfrac{\pi}{2}$, so folgt, daß $\lim\limits_{z \to Q} (z + \bar{z})^2 K_{\mathfrak{K}^2}(z, \bar{z}) = \dfrac{1}{\pi}$ ist. (Der Limeswert ist also vom Radius des Kreises unabhängig!) Da andererseits nach [1. 12] $K_{\mathfrak{A}^2}(z, \bar{z}) \leqq K_{\mathfrak{B}^2}(z, \bar{z}) \leqq K_{\mathfrak{J}^2}(z, \bar{z})$ gilt, so folgt daraus, daß auch $\lim\limits_{z \to Q} (z + \bar{z})^2 K_{\mathfrak{B}^2}(z, \bar{z}) = \dfrac{1}{\pi}$ ist.

Im § 1 der vorliegenden Arbeit wird nun das Verhalten der durch [1. 16] gegebenen Metrik bei der Annäherung an die genannten Limespunkte untersucht. Es wird gezeigt, daß für die Limespunkte m-ter Ordnung (bei einer gewissen im Text näher beschriebenen Annäherung und unter Benutzung der in bezug auf Q normalen Koordinaten) die Relationen

---

[5]) Im § 1 wird auf die Struktur der Limespunkte zweiter und dritter Ordnung näher eingegangen, und im Zusammenhang damit werden die normalen Koordinaten für beide Arten der Randpunkte ausführlicher beschrieben.

Bei den Mannigfaltigkeiten von niedrigerer als der vierten Dimension gibt der obere Index die Dimension der betreffenden Mannigfaltigkeit an.

$$\lim_{\{z_1, z_2\} \to Q} (z_1 + \bar{z}_1)^2 ds^2 = m\,|dz_1|^2, \quad \lim_{\{z_1, z_2\} \to Q} \boldsymbol{I}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{m-1}{m^2\pi^2}, \qquad m = 2, 3$$

gelten.

Anschließend an die Betrachtungen über die Kernfunktion liegt es nahe, Funktionenfamilien zu betrachten, deren quadratische Mittelwerte gewissen Ungleichungen genügen, und insbesondere das Verhalten solcher Funktionen in der Umgebung der Limespunkte zweiter und dritter Ordnung zu studieren. Im § 2 betrachten wir einen Limespunkt Q dritter Ordnung und eine ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegene Punktfolge $\mathfrak{P}^0$ mit $\lim_{\nu \to \infty} \{t_1^{(\nu)}, t_2^{(\nu)}\} = Q$.

Jedem Punkt $\{t_1, t_2\}$ von $\mathfrak{P}^0$ sei eine in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion $f(z_1, z_2; t_1, t_2)$ der beiden komplexen Variabeln z_1, z_2 zugeordnet, die im Punkte $\{t_1, t_2\}$ den Wert eins hat [d. h. $f(t_1, t_2; t_1, t_2) = 1$], während für $\int_{\mathfrak{B}} |f|^2 d\omega$ (unter Benutzung der in bezug auf Q normalen Koordinaten) die Ungleichung

$$\int_{\mathfrak{B}} |f(z_1, z_2; t_1, t_2)|^2\, d\omega_z \leqq \frac{\pi^2}{2\sigma} (t_1 + \bar{t}_1)^3 [1 + C(t_1 + \bar{t}_1)^r]$$

gilt, wobei σ eine mit der Struktur des Randpunktes zusammenhängende Größe ist, während $C < \infty$, $r > 0$ feste von der Lage des Punktes $\{t_1, t_2\}$ unabhängige Konstanten bedeuten. Geschieht die Annäherung des Punktpaares $\{z_1, z_2; t_1, t_2\}$ gegen $\{0, 0; 0, 0\}$ so, daß zwischen der x_1-Koordinate von $\{z_1, z_2\}$ und der des zugehörigen Punktes $\{t_1, t_2\}$ stets eine gewisse (im Texte näher beschriebene) Beziehung besteht, so gilt

$$\lim_{\{z_1, z_2; t_1, t_2\} \to \{0, 0; 0, 0\}} \frac{z_1^3}{(t_1 + \bar{t}_1)^3} f(z_1, z_2; t_1, t_2) = 1. \tag{4. 3}$$

Die Minimalfunktion $\mathsf{M}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; t_1, t_2)$ erfüllt die beiden angegebenen Voraussetzungen, und es gilt insbesondere für sie die Limesrelation (4. 3).

Analoge Formeln werden im § 3 bei der Annäherung an Limespunkte zweiter Ordnung gewonnen.

Herrn Erwin Klein bin ich für Hilfe bei der Fertigstellung der vorliegenden Arbeit zu Dank verpflichtet.

§ 1.

Der weitere Ausbau der in K angewandten Methoden gestattet, wie im nächsten Paragraphen gezeigt werden soll, Limesrelationen bei einer Reihe für die Hermitesche Metrik charakteristischer Größen abzuleiten.

Ein wichtiges Hilfsmittel bei diesen Überlegungen bilden die sog. Jacobischen Reduzierten $\boldsymbol{J}_{\mathfrak{B}}(X_{00}, \ldots, X_{mn}) \equiv \boldsymbol{J}_{\mathfrak{B}}(X)$ [6]) gewisser Hermitescher Formen, die bereits in einer früheren Arbeit (für andere Zwecke) eingeführt wurden [7]). Die $\boldsymbol{J}_{\mathfrak{B}}(X)$ werden auf S. 93 (unabhängig von den genannten Formen) näher definiert.

In diesen Jacobischen Reduzierten treten als Koeffizienten der Veränderlichen X_{pq} gerade die uns interessierenden oben erwähnten Größen auf. Andererseits gilt analog

---

[6]) Da wir mit Funktionen von zwei Veränderlichen operieren, werden wir meistens Doppelindizes benutzen. Wir werden im folgenden stets an der Reihenfolge

$$(0\,0), (1\,0), (0\,1), (2\,0), (1\,1), (0\,2), \ldots\ldots$$

festhalten. Das dem (mn)-ten Glied in dieser Reihenfolge vorhergehende Glied werden wir mit $(m_\nu n_\nu)$ bezeichnen. $\sum_{(pq)=(00)}^{(mn)}$ besagt, daß die Summation über alle Glieder bis zu dem (mn)-ten Glied der angegebenen Folge zu erstrecken ist.

[7]) Vgl. dazu H § 2 wie auch „Über Hermitesche Formen, die zu einem Bereiche gehören", Sitzungsberichte der Berliner Math. Ges. **26** (1927), S. 178—189.

[1. 12] für die Reduzierten $J_{\mathfrak{B}}(X)$ und $J_{\mathfrak{B}^*}(X)$ zweier Bereiche $\mathfrak{B} < \mathfrak{B}^*$ für jeden Wertevorrat der X_{pq}: $J_{\mathfrak{B}}(X) \leqq J_{\mathfrak{B}^*}(X)$.

Dieser Sachverhalt erlaubt, wie im folgenden gezeigt wird, die Methoden der Arbeit K auch hier zwecks Aufstellung der erwähnten Limesrelationen heranzuziehen.

Bei den folgenden Rechnungen ist es zweckmäßig, Symbole für gewisse Matrizen einzuführen; nämlich

$$[X]^{mn} = \begin{pmatrix} X_{00} \\ X_{10} \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{mn} \end{pmatrix}, \qquad [D]^{mn} = \begin{pmatrix} \mathsf{K} & \mathsf{K}_{00\bar{1}0} & \mathsf{K}_{00\bar{0}1} & \cdots & \mathsf{K}_{00\bar{m}\bar{n}} \\ \mathsf{K}_{1000} & \mathsf{K}_{10\bar{1}0} & \mathsf{K}_{10\bar{0}1} & \cdots & \mathsf{K}_{10\bar{m}\bar{n}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \mathsf{K}_{mn00} & \mathsf{K}_{mn\bar{1}0} & \mathsf{K}_{mn\bar{0}1} & \cdots & \mathsf{K}_{mn\bar{m}\bar{n}} \end{pmatrix},$$

$$[\bar{X}]'^{mn} = (\bar{X}_{00}, \bar{X}_{10}, \ldots, \bar{X}_{mn}),$$

$$[\mathsf{K}(z_1, z_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)]^{mn} = (\mathsf{K}(z_1, z_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2), \mathsf{K}_{00\bar{1}0}(z_1, z_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2), \mathsf{K}_{00\bar{0}1}(z_1, z_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2), \ldots, \mathsf{K}_{00\bar{m}\bar{n}}(z_1, z_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)),$$

wobei

$$\mathsf{K} = \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(t_1, t_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2), \qquad \mathsf{K}_{pr\bar{q}\bar{u}} = \frac{d^{p+r+q+u}\, \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(t_1, t_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)}{dt_1^p\, dt_2^r\, d\bar{t}_1^q\, d\bar{t}_2^u}$$

$$\mathsf{K}_{00\bar{p}\bar{r}}(z_1, z_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2) = \frac{d^{p+r}\, \mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)}{d\bar{t}_1^p\, d\bar{t}_2^r}$$

bedeutet.

Bei den Matrizensymbolen als untere Indizes angebrachte Buchstaben geben die in der Matrix fehlenden Kolonnen an.

Auf die Jacobischen Reduzierten $J_{\mathfrak{B}}(X)$ wird man bei der folgenden Aufgabe geführt: *Es ist das Minimum des Integrals*

$$\int_{\mathfrak{B}} |h(z_1, z_2)|^2\, d\omega\,, \qquad d\omega = dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \tag{1. 1}$$

zu bestimmen, wobei zur Konkurrenz alle in $\mathfrak{B}$ regulären und quadratischintegrierbaren Funktionen herangezogen werden, die die Nebenbedingungen

$$h(t_1, t_2) = X_{00}, \quad h_{10}(t_1, t_2) = X_{10}, \quad h_{01}(t_1, t_2) = X_{01}, \ldots, h_{mn}(t_1, t_2) = X_{mn}, \tag{1. 2}$$

$$h_{mn}(t_1, t_2) \equiv \left[\frac{d^{m+n} h(z_1, z_2)}{dz_1^m\, dz_2^n}\right]_{\substack{z_1 = t_1 \\ z_2 = t_1}}$$

erfüllen, wobei X_{pq} feste vorgegebene Konstanten sind. Das gesuchte Minimum hat den Wert

$$-\frac{\begin{vmatrix} 0 & [\bar{X}]'^{mn} \\ [X]^{mn} & [D]^{mn} \end{vmatrix}}{|[D]^{mn}|}\,. \tag{1. 3}$$

Die Hermitesche Form[8]) (1. 3) *kann auch in der Form*

$$\sum_{(kl)=(00)}^{(mn)} \frac{|[D]^{k_\nu l_\nu}|}{|[D]^{kl}|}\, |l_{\mathfrak{B}}^{kl}(X)|^2, \qquad l_{\mathfrak{B}}^{kl}(X) \equiv (-1)^{[(kl)+1]} \frac{|[X]^{kl}\, [D]_{kl}^{kl}|}{|[D]^{k_\nu l_\nu}|} \tag{1. 4}$$

geschrieben werden[9]). (1. 4) *bezeichnen wir als die Jacobische Reduzierte*

$$J_{\mathfrak{B}}(X_{00}, X_{10}, \ldots, X_{mn}).$$

Den Punkt $\{t_1, t_2\}$, der als ein (innerer) Punkt von $\mathfrak{B}$ vorausgesetzt wird, bezeichnen wir als den *Aufpunkt* der Jacobischen Reduzierten $J_{\mathfrak{B}}(X)$.

---

[8]) Wobei nunmehr die X_{pq} als Veränderliche betrachtet werden.

[9]) Vgl. dazu die Arbeit H, insbesondere S. 671—674.

Beweis. Sei $\varphi^{(\nu)}(z_1, z_2)$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, ein in $\mathfrak{B}$ vollständiges Orthogonalfunktionensystem. Man kann dann jede in $\mathfrak{B}$ quadratischintegrierbare und reguläre Funktion $h(z_1, z_2)$ in der Form

$$h(z_1, z_2) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \varphi^{(\nu)}(z_1, z_2), \qquad A_\nu \equiv \int_{\mathfrak{B}} h\, \overline{\varphi^{(\nu)}}\, d\omega \tag{1.5}$$

darstellen, wobei

$$\int_{\mathfrak{B}} |h(z_1, z_2)|^2\, d\omega = \sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu|^2 \tag{1.6}$$

gilt (Vollständigkeitsrelation). Da es umgekehrt zu jedem Wertevorrat A_ν mit endlicher $\sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu|^2$ eine in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion gibt, die die Darstellung (1.5) zuläßt [10]), reduziert sich unsere Aufgabe auf die Berechnung des Minimums der unendlichen Hermiteschen Form $H(A) = \sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu|^2$ bei den Nebenbedingungen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \varphi_{kl}^{(\nu)} = X_{kl}, \qquad (kl) = (00), (10), (01), \ldots, (mn) \tag{1.7}$$

$$\varphi_{kl}^{(\nu)} = \left[\frac{d^{k+l}\varphi^{(\nu)}(z_1, z_2)}{dz_1^k dz_2^l}\right]_{\substack{z_1=t_1 \\ z_2=t_2}}.$$

Um dieses Minimum zu erhalten, differenzieren wir den Ausdruck

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu|^2 - \sum_{(kl)=(00)}^{(mn)} \mu^{kl}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \varphi_{kl}^{(\nu)} - X_{kl}\right) - \sum_{(kl)=(00)}^{(mn)} \overline{\mu}^{kl}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{A}_\nu \overline{\varphi}_{kl}^{(\nu)} - \overline{X}_{kl}\right) \tag{1.8}$$

und erhalten

$$A_\nu = \sum_{(kl)=(00)}^{(mn)} \overline{\mu}^{kl}\, \overline{\varphi}_{kl}^{(\nu)}. \tag{1.9}$$

Setzt man nun die für A_ν erhaltenen Ausdrücke in (1.7) ein und vertauscht die beiden Summationsreihenfolgen (was infolge der absoluten Konvergenz der Reihen (1.7) und $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\varphi_{kl}^{(\nu)}|^2$ zulässig ist [11])), so gelangt man zu

$$\sum_{(kl)=(00)}^{(mn)} \overline{\mu}^{kl} K_{rq\bar{kl}} = X_{rq}, \qquad (rq) = (00), (10), (01), \ldots, (mn), \tag{1.10}$$

woraus

$$\overline{\mu}^{kl} = (-1)^{[(kl)+1]} \frac{\left|[X]^{mn}[D]_{kl}^{mn}\right|}{\left|[D]^{mn}\right|} \text{ [12])} \tag{1.11}$$

---

[10]) Vgl. dazu die Arbeit „Zwei Sätze aus dem Ideenkreis des Schwarzschen Lemmas über die Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen", Math. Annalen **109** (1934), S. 324—348, und Hammerstein, „Über die Approximation von Funktionen zweier komplexer Veränderlicher durch Polynome", Sitzungsberichte der preuß. Akad. der Wissensch. (math.-physik. Klasse) 1933, S. 259—266, insbesondere den Beweis des Hilfssatzes I.

[11]) Die Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\varphi_{kl}^{(\nu)}|^2$, $(kl) > (00)$ wird in derselben Weise bewiesen wie die Endlichkeit von $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\varphi^{(\nu)}|^2$. Um eine Schranke für $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\varphi_{kl}^{(\nu)}|^2$ zu gewinnen, wird dabei das Minimum von $\int_{\mathfrak{B}} |f|^2 d\omega$ unter der Nebenbedingung $\left(\frac{d^{k+l} f}{dz_1^k dz_2^l}\right)_{\substack{z_1=t_1 \\ z_2=t_2}} = 1$ gesucht.

[12]) $(-1)^{[(pq)+1]}$ bedeutet 1, wenn das Indizespaar (pq) eine ungerade, und -1, wenn (pq) eine gerade Nummer in der in Fußnote [6]) angegebenen Reihenfolge hat.

folgt. Das gesuchte Minimum ist durch

$$(1.12)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{A}_\nu \left(\sum_{(kl)=(00)}^{(mn)} \bar{\mu}^{kl} \bar{\varphi}_{kl}^{(\nu)} \right) = \sum_{(kl)=(00)}^{(mn)} \bar{\mu}^{kl} \bar{X}_{kl} = \sum_{(kl)=(00)}^{(mn)} (-1)^{[(kl)+1]} X_{kl} \frac{\left| [X]^{mn} [D]_{kl}^{mn} \right|}{\left| [D]^{mn} \right|}$$

gegeben, woraus (1. 4) folgt. Die Vertauschung der Summationsreihenfolgen ist auch jetzt gestattet, da sowohl $\sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu|^2$ wie $\sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu \bar{\varphi}_{kl}^{(\nu)}|$, $(kl) = (00), (10), \ldots, (mn)$ existiert. Nun zeigen wir, daß (1. 3) auch in der Form (1. 4) geschrieben werden kann. Man kann (1. 3) wie jede Hermitesche Form auf die Gestalt

$$(1.13)\qquad \boldsymbol{J}_{\mathfrak{B}}(X_{00}, X_{10}, \ldots, X_{mn}) = \sum_{(kl)=(00)}^{(mn)} |\boldsymbol{L}_{\mathfrak{B}}^{kl}(X)|^2,$$

$$\boldsymbol{L}_{\mathfrak{B}}^{kl}(X) \equiv \sqrt{\lambda_{\mathfrak{B}}^{kl}} \left(A_{\mathfrak{B}}^{kl00} X_{00} + A_{\mathfrak{B}}^{kl10} X_{10} + \cdots + A_{\mathfrak{B}}^{klk_\nu l_\nu} X_{k_\nu l_\nu} + X_{kl} \right)$$

bringen.

Hält man nun die ersten $(m_\nu n_\nu)$ [13]) Veränderlichen $X_{00}, X_{10}, \ldots, X_{m_\nu n_\nu}$ fest und läßt X_{mn} variieren, so wird dieser Ausdruck ein Minimum besitzen, nämlich $\boldsymbol{J}_{\mathfrak{B}}(X_{00}, X_{10}, \ldots, X_{m_\nu n_\nu})$. Andererseits erhält man denselben Minimalwert, wenn man in (1. 13) $X_{mn} = -\left(\sum_{(kl)=(00)}^{(m_\nu n_\nu)} A_{\mathfrak{B}}^{mnkl} X_{kl} \right)$ setzt. Es ist somit

$$\sum_{(kl)=(00)}^{(m_\nu n_\nu)} |\boldsymbol{L}_{\mathfrak{B}}^{kl}(X)|^2 = \boldsymbol{J}_{\mathfrak{B}}(X_{00}, \ldots, X_{m_\nu n_\nu})$$

oder

$$(1.14)\qquad \boldsymbol{J}_{\mathfrak{B}}(X_{00}, \ldots, X_{mn}) = \boldsymbol{J}_{\mathfrak{B}}(X_{00}, \ldots, X_{m_\nu n_\nu}) + |\boldsymbol{L}_{\mathfrak{B}}^{mn}(X_{00}, \ldots, X_{mn})|^2.$$

Für $\boldsymbol{L}_{\mathfrak{B}}^{mn}(X_{00}, \ldots, X_{mn})$ erhält man aber

$$(1.15)\qquad \boldsymbol{L}_{\mathfrak{B}}^{mn}(X_{00}, X_{10}, \ldots, X_{mn}) = (-1)^{[(mn)+1]} \frac{\left| [X]^{mn} [D]_{mn}^{mn} \right|}{\sqrt{\left| [D]^{mn} \right| \left| [D]^{m_\nu n_\nu} \right|}}.$$

Durch sukzessive Bestimmung des jeweils auftretenden letzten Linearausdruckes $\boldsymbol{L}_{\mathfrak{B}}^{kl}$ in den Formen $\boldsymbol{J}_{\mathfrak{B}}^{kl}(X)$, $(kl) = (mn), (m_\nu n_\nu), \ldots, (01), (10), (00)$ gewinnen wir (1. 3).

Bemerkung. *Es existiert zu jedem Aufpunkte* $\{t_1, t_2\}$ *eine und (bis auf einen Faktor vom Betrage eins) nur eine Lösungsfunktion*

$$(1.16)\qquad f(z_1, z_2) = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & [\mathsf{K}(z_1, z_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)]'^{mn} \\ [X]^{mn} & [D]^{mn} \end{vmatrix}}{\left| [D]^{mn} \right|}$$

der auf S. 93 formulierten Minimumsaufgabe.[14])

Nach (1. 5) und (1. 9) ist

$$f(z_1, z_2) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \varphi^{(\nu)}(z_1, z_2) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{\mu}^{kl} \sum_{(kl)=(00)}^{(mn)} \varphi^{(\nu)}(z_1, z_2)\, \bar{\varphi}_{kl}^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{\mu}^{kl}\, \mathsf{K}_{00\bar{kl}}(z_1, z_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2).$$

(Die Vertauschung der Summationsreihenfolge ist zulässig; denn jede Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\varphi^{(\nu)}(z_1, z_2)\, \bar{\varphi}_{kl}^{(\nu)}(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$ konvergiert gleichmäßig in jedem ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegenen Teilbereiche von $\mathfrak{B}$.) Unter Berücksichtigung von (1. 11) folgt daraus (1. 16).

---

[13]) Wegen der Bedeutung von $(m_\nu n_\nu)$ vgl. Fußnote [6]).

[14]) Von diesem letzten Ergebnis wird in der vorliegenden Arbeit kein Gebrauch gemacht.

In den folgenden Überlegungen werden nur die Jacobischen Reduzierten[15])

$$(1.17)\qquad \boldsymbol{J}_{\mathfrak{B}}(X_{00}, X_{10}, X_{01}) = \frac{1}{\mathsf{K}}\,|X_{00}|^2 + \frac{\mathsf{K}}{\begin{vmatrix}\mathsf{K} & \mathsf{K}_{00\bar{1}0}\\ \mathsf{K}_{1000} & \mathsf{K}_{10\bar{1}0}\end{vmatrix}}\left|-\frac{\mathsf{K}_{1000}}{\mathsf{K}}X_{00}+X_{10}\right|^2$$
$$+\frac{\begin{vmatrix}\mathsf{K} & \mathsf{K}_{00\bar{1}0}\\ \mathsf{K}_{1000} & \mathsf{K}_{10\bar{1}0}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathsf{K} & \mathsf{K}_{00\bar{1}0} & \mathsf{K}_{00\bar{0}1}\\ \mathsf{K}_{1000} & \mathsf{K}_{10\bar{1}0} & \mathsf{K}_{10\bar{0}1}\\ \mathsf{K}_{0100} & \mathsf{K}_{01\bar{1}0} & \mathsf{K}_{01\bar{0}1}\end{vmatrix}}\left|\frac{\begin{vmatrix}\mathsf{K}_{1000} & \mathsf{K}_{10\bar{1}0}\\ \mathsf{K}_{0100} & \mathsf{K}_{01\bar{1}0}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathsf{K} & \mathsf{K}_{00\bar{1}0}\\ \mathsf{K}_{1000} & \mathsf{K}_{10\bar{1}0}\end{vmatrix}}X_{00}-\frac{\begin{vmatrix}\mathsf{K} & \mathsf{K}_{00\bar{1}0}\\ \mathsf{K}_{0100} & \mathsf{K}_{01\bar{1}0}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathsf{K} & \mathsf{K}_{00\bar{1}0}\\ \mathsf{K}_{1000} & \mathsf{K}_{10\bar{1}0}\end{vmatrix}}X_{10}+X_{01}\right|^2,$$

deren Abschnitte und die Jacobische Reduzierte bei den Nebenbedingungen $h(t_1, t_2) = X_{00}$, $h_{01}(t_1, t_2) = X_{01}$:

$$(1.18)\qquad \boldsymbol{H}_{\mathfrak{B}}(X_{00}, X_{01}) = \frac{1}{\mathsf{K}}\,|X_{00}|^2 + \frac{\mathsf{K}}{\begin{vmatrix}\mathsf{K} & \mathsf{K}_{00\bar{0}1}\\ \mathsf{K}_{0100} & \mathsf{K}_{01\bar{0}1}\end{vmatrix}}\left|-\frac{\mathsf{K}_{0100}}{\mathsf{K}}X_{00}+X_{01}\right|^2$$

benutzt.

Für die Hyperkugel $\mathfrak{H}$: $\left|z_1-\frac{1}{\sigma}\right|^2+|z_2|^2<\frac{1}{\sigma^2}$ gilt nach [4.22]:

$$(1.19)\qquad \boldsymbol{J}_{\mathfrak{H}}(X_{00}, X_{10}, X_{01}) = \frac{\pi^2E^3}{2\sigma}\,|X_{00}|^2 + \frac{\pi^2E^5}{6\sigma^3\left(\frac{1}{\sigma^2}-|t_2|^2\right)}\left|\frac{3-3\sigma\bar{t}_1}{E}X_{00}+X_{10}\right|^2$$
$$+\frac{\pi^2E^4(1-\sigma^2|t_2|^2)}{6\sigma^2}\left|-\frac{3\bar{t}_2}{\frac{1}{\sigma^2}-|t_2|^2}X_{00}+\frac{\left(\frac{1}{\sigma}-t_1\right)\bar{t}_2}{\frac{1}{\sigma^2}-|t_2|^2}X_{10}+X_{01}\right|^2,$$

$$(1.20)\qquad \boldsymbol{H}_{\mathfrak{H}}(X_{00}, X_{10}) = \frac{\pi^2E^3}{2\sigma}\,|X_{00}|^2 + \frac{\pi^2E^5}{6\sigma^2(t_1+\bar{t}_1-\sigma|t_1|^2)}\left|-\frac{3\bar{t}_2\sigma}{E}X_{00}+X_{10}\right|^2,$$

wo $E = t_1+\bar{t}_1-\sigma|t_1|^2-\sigma|t_2|^2$ bedeutet.

Für einen Bizylinder $\mathfrak{E}$: $|\varrho_1-z_1|<\varrho_1$, $|z_2|<\varrho_2$ erhält man dagegen nach [4.11]:

$$(1.21)\qquad \boldsymbol{J}_{\mathfrak{E}}(X_{00}, X_{10}, X_{01}) = \pi^2E_1^2E_2^2\,|X_{00}|^2 + \frac{\pi^2}{2}E_1^4E_2^2\left|\frac{2\left(1-\frac{\bar{t}_1}{\varrho_1}\right)}{E_1}X_{00}+X_{10}\right|^2 + \frac{\pi^2}{2}E_1^2E_2^4\left|-\frac{2\bar{t}_2}{\varrho_2E_2}X_{00}+X_{01}\right|^2,$$

$$(1.22)\qquad \boldsymbol{H}_{\mathfrak{E}}(X_{00}, X_{01}) = \pi^2E_1^2E_2^2\,|X_{00}|^2 + \frac{\pi^2}{2}E_1^2E_2^4\left|-\frac{2\bar{t}_2}{\varrho_2E_2}X_{00}+X_{01}\right|^2,$$

wo $E_1 = t_1+\bar{t}_1-\frac{|t_1|^2}{\varrho_1}$, $E_2 = \varrho_2-\frac{|t_2|^2}{\varrho_2}$ bedeutet.

Aus der Tatsache, daß $\boldsymbol{J}_{\mathfrak{B}}(X)$ der Wert des Minimums der auf der S. 93 formulierten Aufgabe ist, folgt eine für die weiteren Betrachtungen wichtige Eigenschaft der Jacobischen Reduzierten. Es gilt nämlich der

Hilfssatz I. *Ist* $\mathfrak{B}<\mathfrak{B}^*$, *so gilt für die Jacobischen Reduzierten* $\boldsymbol{J}_{\mathfrak{B}}(X)$ *und* $\boldsymbol{J}_{\mathfrak{B}^*}(X)$ *mit dem gleichen Aufpunkt* $\{t_1, t_2\} < \mathfrak{B} < \mathfrak{B}^*$ *für jeden Wertevorrat der* X_{pq}:

$$(1.23)\qquad \boldsymbol{J}_{\mathfrak{B}}(X_{00}, X_{10}, \ldots, X_{mn}) \leqq \boldsymbol{J}_{\mathfrak{B}^*}(X_{00}, X_{10}, \ldots, X_{mn}).$$

§ 2.

Wir gehen nun zur Aufstellung der angekündigten Formeln in den Limespunkten dritter Ordnung über und erinnern zunächst an einige Betrachtungen von K. Wir setzen wie früher voraus, daß das Innere von $\mathfrak{B}$ in einer genügend kleinen Umgebung $\mathfrak{U}$ des Randpunktes Q durch

$$(2.1)\qquad \Phi(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) > 0, \qquad [2.1][16])$$

---

[15]) Die Aufstellung der Formeln für $\boldsymbol{J}_{\mathfrak{B}}(X)$ in ganz allgemeiner Form geschah mit Rücksicht darauf, daß das hier angewandte Verfahren die Ableitung analoger Limesrelationen auch für weitere für die Metrik wichtige Größen gestattet. Diese Größen treten als die Koeffizienten der $\boldsymbol{J}_{\mathfrak{B}}(X_{00}, X_{10}, X_{01}, \ldots, X_{mn})$ auf.

[16]) Um das Zurückgreifen auf K zu erleichtern, geben wir bei den Formeln, die in K bereits auftreten, (in eckigen

die Berandung $\mathfrak{b}^3$ von $\mathfrak{B}$ durch

$$\Phi(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) = 0 \qquad (2.\,2)\ [2.\,2]$$

gegeben ist, und daß im Punkte Q die Tangentialhyperebene $\mathfrak{e}^3$ existiert. Wie in der Vorrede (S. 91) erwähnt wurde, wird die in $\mathfrak{e}^3$ liegende Ebene $\mathfrak{C}^2[Q < \mathfrak{C}^2]$ als $z_1 = 0$ und die dazu orthogonale Ebene als $z_2 = 0$ gewählt. (Diese letztere ist bis auf eine Drehung um $z_1 = 0$ bestimmt, da nur gefordert wird, daß sie Q enthält.)

Schließlich kann man die positive Richtung der x_1-Achse so wählen, daß der inneren Normalen im Punkte Q Werte $x_1 > 0$, $y_1 = x_2 = y_2 = 0$ entsprechen. (Vgl. dazu K § 2.) Wir benutzen bei den folgenden Betrachtungen die soeben angegebenen, im § 2 der Arbeit K als in bezug auf Q normal bezeichneten Koordinaten. (2. 2) schreibt sich dann in der Form

$$2x_1 - \psi(y_1, z_2, \bar{z}_2) = 0\,, \qquad (2.\,3)$$

wobei

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y_1}\right)_{\substack{y_1=0\\z_2=0}} = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial z_2}\right)_{\substack{y_1=0\\z_2=0}} = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_2}\right)_{\substack{y_1=0\\z_2=0}} = 0$$

ist. Indem wir die in K § 3 gemachten Voraussetzungen über ψ etwas verschärfen [17]), nehmen wir an, daß ψ in der Umgebung des Punktes Q nach allen Veränderlichen *dreimal* stetig differenzierbar ist. Anstelle von (2. 3) kann man dann auch

$$\Phi \equiv 2x_1 - [a y_1^2 + 2iy_1 (b z_2 - \bar{b}\bar{z}_2) + c z_2^2 + \bar{c}\bar{z}_2^2 + \sigma |z_2|^2 + \psi_3(y_1, z_2, \bar{z}_2)] = 0 \qquad (2.\,4)$$

schreiben, wobei $\lim\limits_{\substack{y_1\to 0\\z_2\to 0}} \dfrac{\psi_3(y_1, z_2, \bar{z}_2)}{y_1^2 + |z_2|^2} = 0$ und a, σ reell sind. $\psi_3(y_1, z_2, \bar{z}_2)$ ist eine in einer genügend kleinen Umgebung des Koordinatenanfangspunktes Q dreimal stetig differenzierbare Funktion der Veränderlichen $y_1, z_2, \bar{z}_2$. *Es sei angenommen, daß eine analytische Abbildung* [18]) *des Körpers* $\mathfrak{B}$ *von der Form*

$$z_1 = z_1^* + 2b\, z_1^* z_2^* + c z_2^{*2} + \cdots, \quad z_2 = z_2^* \qquad (2.\,5)\ [3.\,19a]$$

existiert, und somit die Gleichung von $\mathfrak{b}^3$ in der Umgebung von Q auf die Gestalt

$$2x_1^* = a y_1^{*2} + \sigma |z_2^*|^2 + \psi_3^*(y_1^*, z_2^*, \bar{z}_2^*) \qquad (2.\,6)\ [3.\,17]$$

gebracht werden kann [19]).

Einen vermittels (2. 5) aus $\mathfrak{B}$ gewonnenen Körper $\mathfrak{B}^*$, bei dem die Randhyperfläche in der Umgebung von Q in der Gestalt (2. 6) gegeben ist, bezeichnet man als einen kanonischen Ersetzungskörper von $\mathfrak{B}$ in bezug auf Q.

Ist $\sigma > 0$ und existiert ein kanonischer Ersetzungskörper $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$, dessen Schnitte $\mathfrak{B}^* \cdot (z_1 = \gamma)$ für genügend kleine γ in einer beliebig kleinen Umgebung von Q liegen, so ist, wie in § 5 der Arbeit K gezeigt wurde, Q ein Limespunkt dritter Ordnung, den wir im folgenden mit Q_3 bezeichnen werden.

Unter der Annäherung A^{I} verstehen wir eine solche Konvergenz $\{z_1, z_2\} \to Q_3$, daß der Punkt $\{z_1, z_2\}$ aus $\mathfrak{B}$ noch innerhalb eines Kegels $\mathfrak{W}_\alpha$ verbleibt, wo $\mathfrak{W}_\alpha$ die Gesamtheit

---

Klammern) die entsprechende Nummer der Arbeit K an. Auch im Text werden sie durch eckige Klammern gekennzeichnet.

[17]) Von dieser Verschärfung wird allerdings erst bei der Untersuchung der §§ 3—5 Gebrauch gemacht.

[18]) Unter einer analytischen Abbildung $z_k^* = g_k(z_1, z_2)$, $k = 1, 2$, eines Bereiches $\mathfrak{B}$ wird stets eine in $\mathfrak{B}$ *eineindeutige* Abbildung verstanden, wobei die $g_k(z_1, z_2)$ in $\mathfrak{B}$ reguläre und gleichmäßig beschränkte Funktionen der beiden komplexen Veränderlichen sind. Die Funktion $z_1(z_1^*, z_2^*)$ von (2. 5) ist natürlich auch im Punkte Q_3 regulär.

[19]) Es sei hervorgehoben, daß für den Beweis des Satzes I (§ 5 der Arbeit K) nur die Eindeutigkeit von (2. 5) = [3. 19] in einer genügend kleinen Umgebung von Q erforderlich ist, und man deshalb *stets* $\mathfrak{b}^{*3}$ in der Umgebung von Q auf die Form [5. 4] bringen kann.

aller Strahlen bedeutet, die durch den Randpunkt Q_3 gehen und mit der inneren Normalen einen Winkel bilden, der kleiner als α ist. Benutzt man im Punkte Q_3 normale Koordinaten, so ist der Kegel $\mathfrak{W}_\alpha$ durch die Ungleichungen

$$\frac{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}}{x_1} < \frac{1}{\cos\alpha}, \quad |\alpha| < \frac{\pi}{2} \tag{2. 7}$$

charakterisiert.

Schließlich wird mit $\mathfrak{W}_{c\alpha}$ derjenige Teilbereich von $\mathfrak{W}_\alpha$ bezeichnet, für den außer (2. 7) noch

$$0 < x_1 < c \tag{2. 8}$$

gilt.

Für Funktionen, die die Eigenschaft haben, daß sie bei der Annäherung A^{I} an Q_3 (in bezug auf den Annäherungsweg innerhalb von $\mathfrak{W}_{c\alpha}$ gleichmäßig) gegen Null konvergieren, wird im folgenden durchweg das Zeichen Ω verwendet.

Satz I. *In einem Limespunkt Q_3 gelten bei einer Annäherung A^{I} an Q_3 die folgenden Limesrelationen* [20]):

$$\lim (z_1 + \bar{z}_1)^4 \frac{d\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)}{dz_1} = -\frac{6\sigma}{\pi^2}, \quad \lim (z_1 + \bar{z}_1)^4 \frac{d\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)}{dz_2} = 0; \tag{2. 9}$$

$$\lim (z_1 + \bar{z}_1)^2 ds^2 = \lim (z_1 + \bar{z}_1)^2 \sum_{m,n=1}^{2} \mathsf{T}_{m\bar{n}} dz_m d\bar{z}_n = 3|dz_1|^2; \tag{2. 10}$$

$$\lim \boldsymbol{I}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{2}{9\pi^2}. \tag{2. 11}$$

Beweis. Nach den Ausführungen des § 3 der Arbeit K geht bei einer Transformation (2. 5) eine im Sinne von A^{I} gegen Q_3 konvergierende Punktfolge wieder in eine Folge derselben Art über; ferner ist bei der Annäherung A^{I} nach [3. 7]

$$(z^* + \bar{z}_1^*) = (z_1 + \bar{z}_1)(1 + \Omega).$$

Es genügt deshalb, die behaupteten Limesrelationen für den kanonischen Ersetzungskörper $\mathfrak{B}^*$ zu beweisen [21]).

Einen Körper $\mathfrak{J}$ (bezw. $\mathfrak{A}$), der in $\mathfrak{B}^*$ liegt (bezw. $\mathfrak{B}^*$ enthält) und den Randpunkt Q_3 und in ihm dieselbe Tangentialhyperebene wie $\mathfrak{B}^*$ besitzt, bezeichnet man laut einer in K gegebenen Definition als einen inneren (bezw. äußeren) Vergleichskörper.

Wie in K § 5 gezeigt ist, erhält man solche Vergleichskörper $\mathfrak{J}$ bezw. $\mathfrak{A}$ aus den Hyperkugeln

$$\left|z_1 - \frac{1}{\sigma_k}\right|^2 + |z_2|^2 < \frac{1}{\sigma_k^2}, \qquad k = 1, 2 \tag{2. 12}$$

vermittels der Transformationen

$$z_1' = \frac{z_1}{1 + \alpha_1 z_1}, \quad z_2' = z_2\left[\frac{1 + \alpha_1 z_1}{1 + (\alpha_1 + \beta_1) z_1}\right] \qquad [5. 3] \tag{2. 13}$$

bezw.

$$z_1' = \frac{z_1}{1 - \alpha_2 z_1}, \quad z_2' = z_2\left[\frac{1 + (\beta_2 - \alpha_2) z_1}{1 - \alpha_2 z_1}\right]^{22}, \qquad [5. 21] \tag{2. 14}$$

---

[20]) Bei den folgenden Formeln wurden, der früheren Festsetzung gemäß, die in Bezug auf Q_3 normalen Koordinaten benutzt.

[21]) Wir lassen in den folgenden Betrachtungen bei z_1^*, z_2^* die Sterne fort.

[22]) In [5. 3] soll es nicht $z_2' = \frac{z_2}{1 + \beta_1 z_1}$ sondern $z_2' = \frac{z_2}{1 + \beta_1 z_1'}$, und in [5. 21] soll es nicht $z_2' = z_2[1 + \beta_2 z_1]$ sondern $z_2' = z_2[1 + \beta_2 z_1']$ heißen.

wobei σ_k, $k=1,2$, zwei beliebige positive Größen sind, für die $\sigma_2<\sigma<\sigma_1$ gilt, und α_k, β_k, $k=1,2$, gewisse in der Arbeit K angegebene Konstanten bedeuten[23]).

Wir gehen zur Bestimmung der in den Jacobischen Reduzierten $\boldsymbol{J}(X_{00}, X_{10}, X_{01})$ und $\boldsymbol{H}(X_{00}, X_{01})$ von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ auftretenden Koeffizienten über, die ihrerseits Funktionen des Aufpunktes sind. Da in erster Linie das Verhalten der Funktionen bei der Annäherung A^{I} für das Folgende von Interesse ist, werden wir das auf der S. 98 erklärte Symbol Ω dabei benutzen. Die auftretenden Funktionen hängen allerdings noch von σ ab; wir werden das Zeichen Ω nur dann verwenden, wenn die betreffende Funktion in dem in Betracht kommenden Intervalle von σ auch *in* σ *gleichmäßig* gegen Null konvergiert.

Wir setzen zu Abkürzung[24]):

$$A^{\mathfrak{J}}=(1-\alpha_1 z_1)(1+\beta_1 z_1)=1+\Omega,\quad A^{\mathfrak{A}}=(1+\alpha_2 z_1)(1+\beta_2 z_1)^2=1+\Omega.$$

$$\text{(2.15)}\qquad E^{\mathfrak{J}}=z_1+\bar z_1-(2\alpha_1+\sigma_1)|z_1|^2-\sigma_1|z_2(1+(\beta_1-\alpha_1)z_1-\alpha_1\beta_1 z_1^2)|^2=(z_1+\bar z_1)(1+\Omega),$$

$$E^{\mathfrak{A}}=z_1+\bar z_1-(2\alpha_2-\sigma_2)|z_1|^2-\sigma_2|z_2|^2+\beta_2(z_1+\bar z_1)^2+|z_1|^2(z_1+\bar z_1)[\beta_2^2+\beta_2(2\alpha_2-\sigma_2)]$$
$$-\alpha_2\sigma_2(z_1+\bar z_1)|z_2|^2+\beta_2^2(2\alpha_2-\sigma_2)|z_1|^4-\sigma_2\alpha_2^2|z_1z_2|^2=(z_1+\bar z_1)(1+\Omega).$$

Für die Ableitungen dieser Größen erhält man[25])

$$A^{\mathfrak{J}}_{10}\equiv\frac{dA^{\mathfrak{J}}}{dz_1}=(\beta_1-\alpha_1)-\Omega,\quad A^{\mathfrak{A}}_{10}=(\alpha_2+2\beta_2)+\Omega,\quad E_{1000}\equiv\frac{dE}{dz_1}=(1+\Omega),\quad E_{0100}\equiv\frac{dE}{dz_2}=-\sigma_k\bar z_2(1+\Omega),$$

$$E^{\mathfrak{J}}_{10\bar1\bar0}=-(2\alpha_1+\sigma_1)(1+\Omega),\quad E^{\mathfrak{A}}_{10\bar1\bar0}=(2\alpha_2-\sigma_2+\beta_2)(1+\Omega),\quad E^{\mathfrak{J}}_{01\bar1\bar0}=-\sigma_1 z_2(1+\Omega),$$

$$E^{\mathfrak{A}}_{01\bar1\bar0}=0,\quad E_{01\bar0\bar1}=-\sigma_k(1+\Omega).$$

Da nach [4.22] und [1.15]

$$\text{(2.16)}\qquad \mathsf{K}=\frac{2\sigma_k|A|^2}{\pi^2E^3}=\frac{2\sigma_k}{\pi^2(z_1+\bar z_1)^3}(1+\Omega)\ ^{26})$$

ist, folgt

$$\text{(2.17)}\qquad \mathsf{K}_{1000}=\frac{2\sigma_k}{\pi^2}\left(\frac{A_{10}\bar A}{E^3}-\frac{3A\bar AE_{1000}}{E^4}\right)=-\frac{6\sigma_k(1+\Omega)}{\pi^2(z_1+\bar z_1)^4},\quad \mathsf{K}_{0100}=\frac{6\sigma_k^2z_2(1+\Omega)}{\pi^2(z_1+\bar z_1)^4},$$

$$\mathsf{K}_{10\bar1\bar0}=\frac{24\sigma_k}{\pi^2(z_1+\bar z_1)^5}(1+\Omega),\quad \mathsf{K}_{01\bar1\bar0}=-\frac{24\sigma_k^2\bar z_2}{\pi^2(z_1+\bar z_1)^5}(1+\Omega),\quad \mathsf{K}_{01\bar0\bar1}=\frac{6\sigma_k^2}{\pi^2(z_1+\bar z_1)^4}(1+\Omega)$$

und somit

$$\text{(2.18)}\qquad \begin{vmatrix}\mathsf{K} & \mathsf{K}_{00\bar1\bar0}\\ \mathsf{K}_{1000} & \mathsf{K}_{10\bar1\bar0}\end{vmatrix}=\frac{12\sigma_k^2(1+\Omega)}{\pi^4(z_1+\bar z_1)^8},\qquad \text{(2.19)}\qquad \begin{vmatrix}\mathsf{K} & \mathsf{K}_{00\bar0\bar1}\\ \mathsf{K}_{0100} & \mathsf{K}_{01\bar0\bar1}\end{vmatrix}=\frac{12\sigma_k^3(1+\Omega)}{\pi^4(z_1+\bar z_1)^7},$$

$$\text{(2.20)}\qquad \begin{vmatrix}\mathsf{K} & \mathsf{K}_{00\bar1\bar0}\\ \mathsf{K}_{0100} & \mathsf{K}_{01\bar1\bar0}\end{vmatrix}=-\frac{12\sigma_k^3\bar z_2(1+\Omega)}{\pi^4(z_1+\bar z_1)^8},\qquad \text{(2.21)}\qquad \begin{vmatrix}\mathsf{K} & \mathsf{K}_{00\bar1\bar0} & \mathsf{K}_{00\bar0\bar1}\\ \mathsf{K}_{1000} & \mathsf{K}_{10\bar1\bar0} & \mathsf{K}_{10\bar0\bar1}\\ \mathsf{K}_{0100} & \mathsf{K}_{01\bar1\bar0} & \mathsf{K}_{01\bar0\bar1}\end{vmatrix}=\frac{72\sigma_k^4(1+\Omega)}{\pi^6(z_1+\bar z_1)^{12}}.$$

Um die Limesrelation für $\mathsf{T}_{1\bar1}=\dfrac{\begin{vmatrix}\mathsf{K} & \mathsf{K}_{00\bar1\bar0}\\ \mathsf{K}_{1000} & \mathsf{K}_{10\bar1\bar0}\end{vmatrix}}{\mathsf{K}^2}$ zu gewinnen, ziehen wir die Jacobische

---

[23]) Dabei wurde in K § 5 stillschweigend die Annahme gemacht, daß $\mathfrak{B}^*\cdot(z_2=0)$ zugleich die Projektion von $\mathfrak{B}^*$ auf die z_2-Ebene (d. h. die Menge aller z_2-Koordinaten von $\mathfrak{B}^*$) ist. Ist das nicht der Fall, so wird man statt $\mathfrak{B}^*\cdot(z_2=0)$ bei der im § 5 der Arbeit K angegebenen Konstruktion des äußeren Vergleichskörpers diese Projektion benutzen. Da nun in einer genügend kleinen Umgebung des Punktes Q_3 der Rand $\mathfrak{b}^{*3}$ durch (2. 6) gegeben ist, folgt, daß die Randkurve der Projektion von $\mathfrak{B}^*$ auf $z_2=0$ durch $2x_1=ay^2+\sigma|z_2|^2+\psi_3(y_1,z_2,\bar z_2)$ gegeben ist. Die Betrachtungen des § 5 lassen sich deshalb auch im allgemeinen Falle ohne jede Schwierigkeit wiederholen.

[24]) Um die evtl. Kontrolle der Hauptformeln zu erleichtern, werden in (2. 15) bis (2. 22) die Ergebnisse der Zwischenrechnungen zusammengestellt.

[25]) Falls bei den $\mathsf{K}_{mnp\bar q}$, $A,\ldots$ die Indizes $\mathfrak{J}$ bzw. $\mathfrak{A}$ fehlen, gilt die betreffende Formel sowohl für $\mathfrak{J}$ wie für $\mathfrak{A}$.

[26]) In denjenigen Fällen, wo aus dem Inhalt eindeutig hervorgeht, für welchen Körper die Kernfunktion gemeint ist, wurde aus drucktechnischen Gründen die Bezeichnung des Körpers, die sonst als unterer Index bei K angegeben ist, fortgelassen.

Reduzierte $\boldsymbol{J}(0, X_{10})$ heran. Nach dem Hilfssatz I gilt

$$\boldsymbol{J}_{\mathfrak{Z}}(0, X_{10}) \leqq \boldsymbol{J}_{\mathfrak{Z}^*}(0, X_{10}) \leqq \boldsymbol{J}_{\mathfrak{A}}(0, X_{10}) . \tag{2. 22}$$

Bezeichnet man mit λ^{10} den Ausdruck $\dfrac{\mathsf{K}}{\begin{vmatrix}\mathsf{K} & \mathsf{K}_{00\bar{1}0}\\ \mathsf{K}_{1000} & \mathsf{K}_{10\bar{1}0}\end{vmatrix}}$ [27]),

so folgt aus (2. 22)

$$\lambda^{10}_{\mathfrak{Z}} \leqq \lambda^{10}_{\mathfrak{Z}^*} \leqq \lambda^{10}_{\mathfrak{A}} , \tag{2. 23}$$

woraus man nach (2. 18) und (2. 16)

$$\frac{\dfrac{2\sigma_1(1+\Omega)}{\pi^2(z_1+\bar{z}_1)^3}}{\dfrac{12\sigma_1^2(1+\Omega)}{\pi^4(z_1+\bar{z}_1)^8}} \leqq \lambda^{10}_{\mathfrak{Z}^*} \leqq \frac{\dfrac{2\sigma_2(1+\Omega)}{\pi^2(z_1+\bar{z}_1)^3}}{\dfrac{12\sigma_2(1+\Omega)}{\pi^4(z_1+\bar{z}_1)^8}}$$

und

$$\frac{\pi^2}{6\sigma_1} \leqq \lim \frac{\lambda^{10}_{\mathfrak{Z}^*}}{(z_1+\bar{z}_1)^5} \leqq \frac{\pi^2}{6\sigma_2}$$

erhält. Da $\sigma_1 - \sigma_2$ beliebig klein gemacht werden kann, ist

$$\lim \frac{\lambda^{10}_{\mathfrak{Z}^*}}{(z_1+\bar{z}_1)^5} = \frac{\pi^2}{6\sigma} . \tag{2. 25}$$

Nach (2. 16) folgt schließlich

$$\lim (z_1+\bar{z}_1)^2 \mathsf{T}^{\mathfrak{Z}^*}_{1\bar{1}} = \lim (z_1+\bar{z}_1)^2 \frac{1}{\mathsf{K}_{\mathfrak{Z}^*}\lambda^{10}_{\mathfrak{Z}^*}} = 3. \tag{2. 26}$$

Durch die Heranziehung von $\boldsymbol{H}(0, X_{01})$ und $\boldsymbol{J}(0, 0, X_{01})$ gewinnt man auf einem ähnlichen Wege:

$$\lim \frac{\mu^{01}_{\mathfrak{Z}^*}}{(z_1+\bar{z}_1)^4} = \lim \frac{1}{(z_1+\bar{z}_1)^4} \frac{\mathsf{K}}{\begin{vmatrix}\mathsf{K} & \mathsf{K}_{0100}\\ \mathsf{K}_{00\bar{1}\bar{1}} & \mathsf{K}_{01\bar{1}\bar{1}}\end{vmatrix}} = \frac{\pi^2}{6\sigma^2}, \tag{2. 27}$$

$$\lim \frac{\lambda^{01}_{\mathfrak{Z}^*}}{(z_1+\bar{z}_1)^4} = \lim \frac{1}{(z_1+\bar{z}_1)^4} \frac{\begin{vmatrix}\mathsf{K} & \mathsf{K}_{00\bar{1}0}\\ \mathsf{K}_{1000} & \mathsf{K}_{10\bar{1}0}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathsf{K} & \mathsf{K}_{1000} & \mathsf{K}_{0100}\\ \mathsf{K}_{00\bar{1}0} & \mathsf{K}_{10\bar{1}0} & \mathsf{K}_{01\bar{1}0}\\ \mathsf{K}_{00\bar{0}\bar{1}} & \mathsf{K}_{10\bar{0}\bar{1}} & \mathsf{K}_{01\bar{0}\bar{1}}\end{vmatrix}} = \frac{\pi^2}{6\sigma^2}, \tag{2. 28}$$

woraus

$$\lim (z_1+\bar{z}_1)\,\mathsf{T}^{\mathfrak{Z}^*}_{2\bar{2}} = \lim \frac{z_1+\bar{z}_1}{\mathsf{K}_{\mathfrak{Z}^*}\mu^{01}_{\mathfrak{Z}^*}} = 3\sigma \tag{2. 29}$$

bezw. nach [1. 17]

$$\lim \boldsymbol{I}_{\mathfrak{Z}^*}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \lim \mathsf{K}^3_{\mathfrak{Z}^*}\lambda^{10}_{\mathfrak{Z}^*}\lambda^{01}_{\mathfrak{Z}^*} = \frac{2}{9\pi^2} \tag{2. 30}$$

folgt, womit (2. 11) bewiesen ist. Die Heranziehung von $\boldsymbol{J}\left(\dfrac{X_{00}}{\sqrt{(z_1+\bar{z}_1)^3}}, \dfrac{X_{10}}{\sqrt{(z_1+\bar{z}_1)^5}}\right)$ führt zu einer Limesrelation für $\dfrac{d\mathsf{K}_{\mathfrak{Z}^*}}{dz_1}$.

---

[27]) Vgl. auch (1. 13).

Aus

$$(2.31)\quad \boldsymbol{J}_{\mathfrak{Z}}\left(\frac{X_{00}}{\sqrt{(z_1+\bar z_1)^3}},\frac{X_{10}}{\sqrt{(z_1+\bar z_1)^5}}\right)\leqq \boldsymbol{J}_{\mathfrak{Z}^*}\left(\frac{X_{00}}{\sqrt{(z_1+\bar z_1)^3}},\frac{X_{10}}{\sqrt{(z_1+\bar z_1)^5}}\right)\leqq \boldsymbol{J}_{\mathfrak{A}}\left(\frac{X_{00}}{\sqrt{(z_1+\bar z_1)^3}},\frac{X_{10}}{\sqrt{(z_1+\bar z_1)^5}}\right)$$

folgt in Verbindung mit (2. 16), (2. 25) und (2. 17)

$$\frac{\pi^2}{2\sigma_1}|X_{00}|^2+\frac{\pi^2}{6\sigma_1}|3X_{00}+X_{10}|^2\leqq\frac{\pi^2}{2\sigma}|X_{00}|^2+\frac{\pi^2}{6\sigma}\left|-\lim(z_1+\bar z_1)\frac{\mathsf{K}_{1000}}{\mathsf{K}}X_{00}+X_{10}\right|^2$$
$$\leqq\frac{\pi^2}{2\sigma_2}|X_{00}|^2+\frac{\pi^2}{6\sigma_2}|3X_{00}+X_{10}|^2,$$

woraus man

$$(2.32)\quad -\lim(z_1+\bar z_1)\frac{\mathsf{K}_{1000}}{\mathsf{K}}=3,\quad \text{d. h.}\quad \lim(z_1+\bar z_1)^4\mathsf{K}_{1000}=-\frac{6\sigma}{\pi^2},$$

und unter Berücksichtigung von (2. 16) die *erste in* (2. 9) *angegebene Limesrelation* erhält. Ferner folgt aus

$$(2.33)\qquad \boldsymbol{H}_{\mathfrak{Z}^*}(X_{00},0)\leqq\boldsymbol{H}_{\mathfrak{A}}(X_{00},0)$$

unter Berücksichtigung von (2. 16), (2. 27) und (2. 17)

$$\frac{\pi^2}{2\sigma}(z_1+\bar z_1)^3(1+\Omega)+\frac{\pi^2}{6\sigma^2}(z_1+\bar z_1)^2\left|-(z_1+\bar z_1)\frac{\mathsf{K}_{0100}}{\mathsf{K}}\right|^2$$
$$\leqq\frac{\pi^2}{2\sigma_2}(z_1+\bar z_1)^3(1+\Omega)+\frac{\pi^2}{6\sigma_2^2}(z_1+\bar z_1)^4\left|-\frac{3\sigma_2\bar z_2}{z_1+\bar z_1}\right|^2.$$

Aus dieser Ungleichung gewinnt man, indem man sie durch $(z_1+\bar z_1)^2$ dividiert,

$$(2.34)\qquad \lim(z_1+\bar z_1)\frac{\mathsf{K}_{0100}}{\mathsf{K}}=0$$

und unter Berücksichtigung von (2. 16) die *zweite in* (2. 9) *angegebene Limesrelation*. Schließlich folgt aus

$$(2.35)\qquad \boldsymbol{J}_{\mathfrak{Z}^*}(0,X_{10},0)\leqq\boldsymbol{J}_{\mathfrak{A}}(0,X_{10},0)$$

nach (2. 25), (2. 28), (2. 20) und (2. 18)

$$(2.36)\quad \frac{\pi^2}{6\sigma}(z_1+\bar z_1)^5+\frac{\pi^2}{6\sigma^2}(z_1+\bar z_1)^4\left|\begin{vmatrix}\mathsf{K} & \mathsf{K}_{00\bar1\bar0}\\ \mathsf{K}_{0100} & \mathsf{K}_{01\bar1\bar0}\end{vmatrix}\middle/\begin{vmatrix}\mathsf{K} & \mathsf{K}_{00\bar1\bar0}\\ \mathsf{K}_{1000} & \mathsf{K}_{10\bar1\bar0}\end{vmatrix}\right|^2\leqq\frac{\pi^2}{6\sigma_2}(z_1+\bar z_1)^5+\frac{\pi^2}{6\sigma_2^2}(z_1+\bar z_1)^4|\sigma_2 z_2|^2,$$

d. h. (vgl. (2. 18))

$$\lim(z_1+\bar z_1)^8\begin{vmatrix}\mathsf{K} & \mathsf{K}_{00\bar1\bar0}\\ \mathsf{K}_{0100} & \mathsf{K}_{01\bar1\bar0}\end{vmatrix}=0,$$

woraus man schließlich

$$(2.37)\qquad \lim(z_1+\bar z_1)^2\mathsf{T}_{1\bar2}^{\mathfrak{Z}^*}=\lim(z_1+\bar z_1)^2\frac{\begin{vmatrix}\mathsf{K} & \mathsf{K}_{00\bar1\bar0}\\ \mathsf{K}_{0100} & \mathsf{K}_{01\bar1\bar0}\end{vmatrix}}{\mathsf{K}^2}=0$$

erhält. Aus (2. 26), (2. 37), (2. 29) folgt (2. 10).

Wir gehen nun zu den Punkten zweiter Ordnung über. Die Randmannigfaltigkeit $\mathfrak{b}^3$ in der Umgebung von Q soll wieder durch (2. 3) gegeben sein, wobei jetzt nur die einmalige Differenzierbarkeit von ψ (nach allen Veränderlichen) vorausgesetzt wird. $\mathfrak{b}^3$ habe ferner in der Umgebung von Q ein Flächenstück $\mathfrak{H}^2$ mit einer analytischen Fläche $z_1-g(z_2)=0$ gemein. Dabei soll $g(z_2)$, $g'(0)>0$, eine in $\mathfrak{B}^2$ (Projektion von $\mathfrak{b}^3$ auf die

z_2-Ebene) eindeutige und reguläre Funktion von z_2 bedeuten und Q ein innerer Punkt von $\mathfrak{H}^2$ auf $z_1 - g(z_2)$ sein[28]).

Vermöge der Transformation $z_1' = z_1 - g(z_2)$, $z_2' = z_2$ erreicht man dann, daß das Flächenstück $\mathfrak{H}^2$ in der Ebene $z_1' = 0$ liegt. Bei den Untersuchungen der Punkte zweiter Ordnung benutzen wir stets diese Koordinaten z_1', z_2'[29]). Unter gewissen weiteren natürlichen Voraussetzungen über $\mathfrak{B}$ (siehe K § 6[30])) ist die Ordnung des Unendlichkeitwerdens der Kernfunktion bei der Annäherung an diese Randpunkte $\lambda(Q, \mathfrak{B}) = 2$. Im zweiten Teile des § 6 der Arbeit K haben wir eine spezielle Klasse dieser Randpunkte ausgesondert und gezeigt, daß sie Limespunkte sind. Die (im Vergleich zu § 6 etwas abgeänderten) Voraussetzungen über die Struktur der im weiteren betrachteten Randpunkte (die als Randpunkte Q_2 bezeichnet werden) lauten:

1. Der Schnitt $\mathfrak{H}^2 = \mathfrak{b}^3 \cdot (z_2 = 0)$ ist in bezug auf $z_2 = 0$ ein Sternbereich. Ist $R = h(\theta)$ die Gleichung seiner Randkurve, so nehmen wir an, daß $h(\theta)$ stetig differenzierbar ist. Es gelte also

$$|h(\theta)| \geqq a > 0, \qquad |h'(\theta)| \leqq B < \infty, \qquad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi,$$

wo a und B geeignet gewählte Konstanten bedeuten.

2. Der Schnitt $\mathfrak{B} \cdot (z_1 = 0)$ enthält einen Kreis $\mathfrak{J}^2$ vom Radius $\frac{1}{\varrho} > 0$, der die y_1-Achse im Punkte $z_1 = 0$ berührt.

3. Über die Schnitte $\mathfrak{B} \cdot (z_1 = \gamma)$ setzen wir voraus, daß

$$\frac{\mathfrak{B} \cdot (z_1 = 0)}{m(|\gamma|)} < \mathfrak{B} \cdot (z_1 = \gamma) \qquad \text{für } |\gamma| \leqq \delta, \ \gamma < \mathfrak{J}^2, \tag{2. 38}$$

$$m(|\gamma|)\, \mathfrak{B} \cdot (z_1 = 0) > \mathfrak{B} \cdot (z_1 = \gamma) \qquad \text{für } |\gamma| \leqq \delta, \ \mathbf{Re}(\gamma) > 0 \tag{2. 39}$$

ist[31]), wobei $m(|\gamma|) = 1 + N|\gamma|^{\frac{1}{\tau}}$ ist und $N < \infty$, $\tau > 0$ geeignet gewählte Konstanten bedeuten.

4. Für alle Punkte von $\mathfrak{B} + \mathfrak{b}^3$ gilt $z_1 + \bar{z}_1 \geqq 0$.

Unter der Annäherung A^{V} gegen den Randpunkt $Q(0, a_2)$, $a_2 < \mathfrak{H}^2$, wird die Konvergenz $\{z_1, z_2\} \to \{0, a_2\}$ verstanden, wobei die z_1-Koordinaten des Punktes $\{z_1, z_2\}$ von $\mathfrak{B}$ innerhalb eines Winkelgebietes

$$\mathfrak{W}_\alpha^2: \qquad x_1 > 0, \ \frac{|z_1|}{x_1} < \frac{1}{\cos\alpha}, \ |\alpha| < \frac{\pi}{2} \tag{2. 40}$$

verbleibt.

---

[28]) Diese Art von Randpunkten treten z. B. bei gewissen Bereichen mit Maximumfläche auf. Vgl. dazu „Über eine in gewissen Bereichen mit Maximumfläche gültige Integraldarstellung der Funktionen zweier komplexer Variablen. I", Math. Zeitschr. **39** (1934), S. 77—94, insbesondere die im § 5 angeführten Bereiche.

[29]) Die oberen Striche werden bei z_1', z_2' im folgenden fortgelassen.

[30]) Ich bemerke, daß bei den auf S. 23 der Arbeit K durchgeführten Betrachtungen $A(z_2, \bar{z}_2)$ durch $A(y_1, z_2, \bar{z}_2)$ und in [6. 3] $\lim\limits_{z_1 \to 0} A(z_2, \bar{z}_2)$ durch $\lim\limits_{y_1 \to 0} A(y_1, z_2, \bar{z}_2)$ ersetzt werden muß.

[31]) Die in K S. 26 in den Zeilen 6, 7, 8 von oben angegebenen Voraussetzungen können durch die (viel schwächeren) hier angegebenen Voraussetzungen 2., 3. ersetzt werden. Die weiteren Betrachtungen des § 6 von K brauchen dabei nicht geändert zu werden.

Ferner sei darauf hingewiesen, daß in der in [28]) zitierten Arbeit und in deren II. Teile (erscheint demnächst in der Math. Zeitschr.) gewisse Körper, welche von endlich vielen analytischen Hyperflächen berandet sind, betrachtet werden. Wie dort im § 7 gezeigt wird, läßt sich bei einer großen Klasse dieser Bereiche jede „Lamelle" der analytischen Randhyperfläche in die hier angegebene Normalgestalt überführen, wobei die Voraussetzungen 1.—4. erfüllt sind.

In Analogie zu früherem verstehen wir unter $\mathfrak{W}^2_{\varepsilon\varkappa}$ denjenigen Teilbereich von $\mathfrak{W}^2_\varkappa$, wo außer (2. 40) noch (2. 8) gilt. $\varkappa$ soll bei den weiteren Betrachtungen, nachdem es einmal gewählt wurde, ohne besondere Erwähnung konstant gehalten werden.

Um die Veränderungen der Grenzformeln, die bei der Variation des Limespunktes innerhalb von $\mathfrak{H}^2$ eintreten, zu übersehen, lassen wir die Voraussetzung, daß Q_2 der Koordinatenanfangspunkt ist, fallen und nehmen im folgenden nur an, daß Q_2 ein innerer Punkt von $\mathfrak{H}^2$ ist, d. h., daß Q_2 die Koordinaten 0, a_2 ($a_2 < \mathfrak{H}^2$) hat.

Für die Funktionen, die bei der A^{V}-Annäherung an $\{0, a_2\}$ ($a_2 < \mathfrak{H}^2$, fest) gleichmäßig gegen 0 konvergieren, deren genauerer Wert für unsere Zwecke ohne Interesse ist, wird durchweg das Zeichen O benutzt, während die bei derselben Annäherung gleichmäßig beschränkten Funktionen (um diese Eigenschaft hervorzuheben) meistens mit B bezeichnet werden.

Satz II. *Bei einem Limespunkte $Q_2(0, a_2)$, $a_2 < \mathfrak{H}^2$, gelten bei der Annäherung A^{V} an Q_2 die Limesrelationen*

$$(2.\,41)\quad \lim (z_1+\bar{z}_1)^3 \frac{d\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)}{dz_1} = -\frac{2}{\pi^2 \mathsf{P}^2(a_2)}, \lim (z_1+\bar{z}_1)^3 \frac{d\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)}{dz_2} = 0,$$

$$(2.\,42)\quad \lim (z_1+\bar{z}_1)^2\, ds^2 = \lim (z_1+\bar{z}_1)^2 \sum_{m,n=1}^{2} \mathsf{T}_{m\bar{n}} dz_m d\bar{z}_n = 2\,|dz_1|^2,$$

$$(2.\,43)\quad \lim \boldsymbol{I}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{1}{4\pi^2},$$

wobei $\mathsf{P}(a_2)$ der Bildradius von $\mathfrak{H}^2$ in Bezug auf a_2 ist [32]).

Beweis. Um die Vergleichskörper von $\mathfrak{B}$ in bezug auf Q_2 zu konstruieren, benötigen wir eine Funktion $f_\nu(z_2)$, die bereits in der Arbeit K in [6. 14] eingeführt wurde. $f_\nu(z)$ bildet die rechte z-Halbebene auf ein gleichschenkliges Dreieck AOB ab. Die Seiten AO und BO dieses Dreieckes liegen symmetrisch zu der reellen Achse, der Punkt O liegt auf dieser Achse und hat die Abszisse 1. $\sphericalangle\, AOB$ hat den Wert $\frac{\pi}{\nu}$. Um den Parameter ν zu bestimmen, wählt man ein positives $\varkappa < \frac{a}{Z_2^{\max}} \leqq 1$, wo a den Abstand des Punktes a_2 von der Berandung von $\mathfrak{H}^2$ und $Z_2^{\max}$ das Maximum der Beträge aller z_2-Koordinaten von $\mathfrak{B}$ bedeuten. Mit $\mathfrak{J}^2_\nu(\varkappa)$ bezeichnen wir dasjenige Gebiet in der rechten z-Halbebene, wo $|f_\nu(z)| > \varkappa$ ist. Man bestimmt nun ein so großes ν, daß die Ungleichungen [6. 16], [6. 17], [6. 29], [6. 30] und [6. 31] erfüllt sind. (In den letzten drei Ungleichungen gehen die in den Voraussetzungen 1.—3. auftretenden Konstanten ein.) Alle diese Ungleichungen ergeben nur eine untere Schranke für ν.

Da man den in 2. angegebenen Kreis $\mathfrak{J}^2$ stets durch einen kleineren (die y-Achse im Koordinatenanfangspunkte berührenden) Kreis ersetzen darf, nehmen wir schließlich von vornherein an, daß $\mathfrak{J}^2 < \mathfrak{J}^2_\nu(\varkappa)$ ist.

Es sei $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}^2 \times \mathfrak{H}^2$. Der aus $\mathfrak{J}$ vermittels der Transformation $z_1' = z_1$, $z_2' = z_2 f_\nu(z_1)$ entstandene Körper $\mathfrak{J}_\nu$ ist ein innerer Vergleichskörper von $\mathfrak{B}$; denn erstens wird im Punkte

[32]) Unter dem Bildradius eines Gebietes $\mathfrak{H}^2$ in bezug auf den Punkt a_2 versteht man den Radius derjenigen Kreisscheibe, auf welche man das Gebiet $\mathfrak{H}^2$ schlicht und konform abbilden kann durch diejenige Funktion, die im Punkt a_2 die Ableitung eins hat. Vergl. dazu Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie II (Berlin, 1927), S. 322.

Im folgenden Abschnitt beziehen wir uns auf § 6 von K (S. 24—28), wobei wir anstelle von A_1, O_1, B_1, $\mathfrak{T}_\nu(\varkappa)$ jetzt A, O, B, $\mathfrak{J}^2_\nu(\varkappa)$ benutzen. Auf S. 25, Zeile 1 von oben soll anstatt „z-Ebene“ gelesen werden „rechte z-Halbebene“ und in [6. 20] „$M_2 \leqq 1$“ durch „$M_2 \leqq 1 + \varepsilon_\nu$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu = 0$“ ersetzt werden.

Q_2 die innere Normale mit der x_1-Achse zusammenfallen, und zweitens gilt, da $\mathfrak{J}_\nu$ in dem (in der Arbeit K angegebenen) Körper $\mathfrak{D}^{(\nu)} < \mathfrak{B}$ liegt, um so mehr $\mathfrak{J}_\nu < \mathfrak{B}$.

Als äußeren Vergleichskörper benutzen wir den in der Arbeit K angegebenen Körper $\mathfrak{A}_\nu$ (dort mit $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ bezeichnet), der aus $\mathfrak{A} = \mathfrak{E}^2 \times \mathfrak{H}^2$ ($\mathfrak{E}^2$ die rechte z_1-Halbebene) vermittels $z_1' = z_1$, $z_2' = \dfrac{z_2}{f_\nu(z_1)}$ entsteht.

Wir gehen nun daran, die Koeffizienten der Jacobischen Reduzierten $\boldsymbol{J}(X_{00}, X_{10}, X_{01})$ und $\boldsymbol{H}(X_{00}, X_{01})$ für $\mathfrak{J}_\nu$ und $\mathfrak{A}_\nu$ auszurechnen.

Nach [6. 14] und den Ausführungen des § 2 der Arbeit „Über die ausgezeichneten Randflächen . . ." [33]), wo eine mit $f_\nu(z)$ zusammenhängende Funktion $t_\nu(z)$ betrachtet wurde, gilt für $f_\nu(z_1)$ in der Nähe von $z_1 = 0$ die Entwicklung

$$(2.\,44)\quad f_\nu(z_1) = 1 - A_\nu z_1^{\frac{1}{\nu}} + \alpha_1 z_1^{1+\frac{1}{\nu}} + \cdots, \qquad A_\nu = \frac{\nu\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\nu}\right)},$$

woraus

$$(2.\,45)\qquad f_\nu(0) = 1, \quad \lim_{z_1 \to 0} (z_1 + \bar{z}_1)\, f_\nu'(z_1) = 0$$

folgt.

Bezeichnet man mit $w(z_2)$, $w(0) = 0$, $w'(0) > 0$, diejenige Funktion, die $\mathfrak{H}^2$ auf den Kreis $|w| < 1$ abbildet, und setzt man zur Abkürzung $w \equiv w^{(0)}$, $\dfrac{dw}{dz_2} \equiv w^{(1)}$ usw., so ist nach dem ersten Mittelwertsatz

$$(2.\,46)\quad w^{(k)}\left(\frac{z_2}{f_\nu(z_1)}\right) = w^{(k)}(z_2) + z_1^{\frac{1}{\nu}} K_k(z_1, z_2) \text{ bzw. } w^{(k)}[z_2 f_\nu(z_1)] = w^{(k)}(z_2) + z_1^{\frac{1}{\nu}} G_k(z_1, z_2),$$

wo

$$(2.\,47)\quad K_k = -w^{(k+1)}\left(\frac{z_2}{f_\nu(\vartheta z_1)}\right)\frac{z_2 f_\nu^{(1)}(\vartheta z_1)}{[f_\nu(\vartheta z_1)]^2}, \quad G_k = w^{(k+1)}[z_2 f_\nu(\vartheta z_1)]\, z_2 f_\nu^{(1)}(\vartheta z_1),$$

$$0 < \vartheta < 1; \qquad k = 0, 1; \qquad f_\nu^{(\varkappa)} \equiv \frac{d^\varkappa f}{d\left(z_1^{\frac{1}{\nu}}\right)^\varkappa}$$

bedeutet. Da nun nach [1. 15] und [4. 11]

$$(2.\,47\,a)\quad \mathsf{K}_{\mathfrak{J}_\nu} = \frac{\left|w'\left(\frac{z_2}{f_\nu(z_1)}\right)\right|^2}{\pi^2[z_1 + \bar{z}_1 - \sigma|z_1|^2]^2\left[1 - \left|w\left(\frac{z_2}{f_\nu(z_1)}\right)\right|^2\right]^2 |f_\nu(z_1)|^2}, \qquad \mathsf{K}_{\mathfrak{A}_\nu} = \frac{|w'(z_2 f_\nu(z_1))|^2\,|f_\nu(z_1)|^2}{\pi^2[z_1+\bar{z}_1]^2[1 - |w(z_2 f_\nu(z_1))|^2]^2}$$

ist, erhält man

$$(2.\,48)\qquad \mathsf{K} = \frac{B}{\pi^2(z_1+\bar{z}_1)^2}[1 + \mathsf{O}], \qquad \mathsf{K}_{1000} = \frac{\mathsf{K}}{(z_1+\bar{z}_1)}[-2 + \mathsf{O}]\ [34]), \qquad \mathsf{K}_{0100} = \mathsf{K}B_1,$$

wo (wie bereits angegeben)

$$B = \frac{|w^{(1)}(z_2)|^2}{[1 - |w(z_2)|^2]^2} = \frac{1}{\mathsf{P}^2(z_2)}, \qquad B_1 = \frac{w^{(2)}(z_2)}{w^{(1)}(z_2)} + 2\frac{\overline{w(z_2)}\,w'(z_2)}{1 - |w(z_2)|^2} + \mathsf{O}$$

---

[33]) Math. Annalen **104** (1931), S. 611—636. Diese Untersuchung wird im folgenden als Arbeit A zitiert.

[34]) Diese Relation für $\mathsf{K}_{1000}^{\mathfrak{J}_\nu}$ gewinnt man aus

$$\mathsf{K}_{1000}^{\mathfrak{J}_\nu} = \mathsf{K}\left[-\frac{w^{(2)}\left(\frac{z_2}{f_\nu(z_1)}\right) z_2 f_\nu'(z_1)}{w^{(1)}\left(\frac{z_2}{f_\nu(z_1)}\right)[f_\nu(z_1)]^2} - 2\frac{1 - \varrho z_1}{(z_1 + \bar{z}_1 - \varrho|z_1|^2)} - 2\frac{\overline{w\left(\frac{z_2}{f_\nu(z_1)}\right)}\, w^{(1)}\left(\frac{z_2}{f_\nu(z_1)}\right) z_2 f_\nu'(z_1)}{\left(1 - \left|w\left(\frac{z_2}{f_\nu(z_1)}\right)\right|^2\right)[f_\nu(z_1)]^2} - \frac{f_\nu'(z_1)}{f_\nu(z_1)}\right];$$

ähnlich erschließt man unter Benutzung von (2. 44) und (2. 46) die weiteren Formeln. Insofern bei K_{mnpq} sich kein oberer Index $\mathfrak{J}_\nu$ oder $\mathfrak{A}_\nu$ befindet, gilt die betreffende Formel für beide Körper.

bedeutet. Ferner ist

$$(2.49)\qquad \mathsf{K}_{10\bar{1}\bar{0}} = \mathsf{K}\left[\frac{6+\mathsf{O}}{(z_1+\bar{z}_1)^2}\right], \quad \mathsf{K}_{01\bar{0}\bar{1}} = \mathsf{K}(B_2+\mathsf{O}), \quad \mathsf{K}_{10\bar{0}\bar{1}} = -\frac{\mathsf{K}}{(z_1+\bar{z}_1)}[2\bar{B}_1+\mathsf{O}],$$

wo $B_2 = |B_1|^2 + 2B$ ist. Wir erhalten weiter

$$(2.50)\qquad \begin{vmatrix} \mathsf{K} & \mathsf{K}_{1000} \\ \mathsf{K}_{00\bar{1}\bar{0}} & \mathsf{K}_{10\bar{1}\bar{0}} \end{vmatrix} = \frac{2\mathsf{K}^2}{(z_1+\bar{z}_1)^2}[1+\mathsf{O}], \qquad (2.51)\qquad \begin{vmatrix} \mathsf{K} & \mathsf{K}_{0100} \\ \mathsf{K}_{00\bar{0}\bar{1}} & \mathsf{K}_{01\bar{0}\bar{1}} \end{vmatrix} = 2\mathsf{K}^2(B+\mathsf{O}),$$

$$(2.52)\qquad \begin{vmatrix} \mathsf{K} & \mathsf{K}_{0100} \\ \mathsf{K}_{00\bar{1}\bar{0}} & \mathsf{K}_{01\bar{1}\bar{0}} \end{vmatrix} = \frac{\mathsf{K}^2\mathsf{O}}{(z_1+\bar{z}_1)}, \qquad (2.53)\qquad \begin{vmatrix} \mathsf{K} & \mathsf{K}_{1000} & \mathsf{K}_{0100} \\ \mathsf{K}_{00\bar{1}\bar{0}} & \mathsf{K}_{10\bar{1}\bar{0}} & \mathsf{K}_{01\bar{1}\bar{0}} \\ \mathsf{K}_{000\bar{1}} & \mathsf{K}_{100\bar{1}} & \mathsf{K}_{010\bar{1}} \end{vmatrix} = \frac{4\mathsf{K}^3(B+\mathsf{O})}{(z_1+\bar{z}_1)^2}.$$

Analog wie bei den Limespunkten dritter Ordnung folgt nach (2. 23), (2. 48) und (2. 50)

$$(2.54)\qquad \lambda_{\mathfrak{B}}^{10} = \frac{1}{2\mathsf{K}}(z_1+\bar{z}_1)^2(1+\mathsf{O}),$$

woraus man

$$(2.55)\qquad \lim (z_1+\bar{z}_1)^2 \mathsf{T}_{1\bar{1}}^{\mathfrak{B}} = \lim \frac{(z_1+\bar{z}_1)^2}{\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}\lambda_{\mathfrak{B}}^{10}} = 2$$

gewinnt. Analog ergibt sich (vgl. S. 100) nach (2. 51), (2. 50) und (2. 53)

$$(2.56)\quad \lim \frac{\mu_{\mathfrak{B}}^{01}}{(z_1+\bar{z}_1)^2} = \frac{\pi^2}{2B^2}, \qquad (2.57)\quad \lim \frac{\lambda_{\mathfrak{B}}^{01}}{(z_1+\bar{z}_1)^2} = \frac{\pi^2}{2B^2},$$

woraus

$$(2.58)\qquad \lim \mathsf{T}_{2\bar{2}}^{\mathfrak{B}} = 2B$$

und (2. 43) folgt.

Aus

$$(2.59)\qquad \frac{B}{\pi^2}\boldsymbol{J}_{\mathfrak{Z}_\nu}\left(\frac{X_{00}}{(z_1+\bar{z}_1)}, \frac{X_{10}}{(z_1+\bar{z}_1)^2}\right) \leqq \frac{B}{\pi^2}\boldsymbol{J}_{\mathfrak{B}}\left(\frac{X_{00}}{(z_1+\bar{z}_1)}, \frac{X_{10}}{(z_1+\bar{z}_1)^2}\right) \leqq \frac{B}{\pi^2}\boldsymbol{J}_{\mathfrak{M}_\nu}\left(\frac{X_{00}}{(z_1+\bar{z}_1)}, \frac{X_{10}}{(z_1+\bar{z}_1)^2}\right)$$

folgt

$$(2.60)\qquad |X_{00}|^2 + \frac{1}{2}|2X_{00}+X_{10}|^2 \leqq |X_{00}|^2 + \frac{1}{2}\left|-\lim (z_1+\bar{z}_1)\frac{\mathsf{K}_{1000}}{\mathsf{K}}X_{00} + X_{10}\right|^2 \leqq |X_{00}|^2 + \frac{1}{2}|2X_{00}+X_{10}|^2,$$

woraus man

$$(2.61)\quad \lim (z_1+\bar{z}_1)\frac{\mathsf{K}_{1000}}{\mathsf{K}} = -2, \quad \text{d. h.} \quad \lim (z_1+\bar{z}_1)^3\mathsf{K}_{1000} = -\frac{2B}{\pi^2}$$

erhält. Multipliziert man (2. 33) mit $\frac{B}{\pi^2}\frac{1}{(z_1+\bar{z}_1)^2}$ und vollzieht dann den Grenzübergang $z_1 \to 0$, $z_2 \to a_2$, so erhält man

$$1 + \frac{1}{2}\lim \left|\frac{\mathsf{K}_{0100}}{\mathsf{K}}\right|^2 \leqq 1 + \frac{1}{2}|B_1|^2,$$

woraus

$$(2.62)\quad \lim \left|\frac{\mathsf{K}_{0100}}{\mathsf{K}}\right| = |B_1|, \quad \text{d. h.} \quad \lim (z_1+\bar{z}_1)^2|\mathsf{K}_{1000}| = \frac{B|B_1|}{\pi^2}$$

folgt. Durch die Multiplikation von (2. 35) mit $\frac{2B}{\pi^2(z_1+\bar{z}_1)^4}$ und den Grenzübergang

$z_1 \to 0, z_2 \to a_2$ erhält man

$$1 + \frac{1}{B}\left|\frac{1}{(z_1+\bar{z}_1)}\frac{\begin{vmatrix} \mathsf{K} & \mathsf{K}_{0100} \\ \mathsf{K}_{00\bar{1}0} & \mathsf{K}_{01\bar{1}0}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathsf{K} & \mathsf{K}_{1000} \\ \mathsf{K}_{00\bar{1}0} & \mathsf{K}_{10\bar{1}0}\end{vmatrix}}\right|^2 \leqq 1 + \frac{1}{B}|\mathsf{O}|^2,$$

woraus

$$\text{(2. 63)}\quad \lim \frac{1}{(z_1+\bar{z}_1)}\frac{\begin{vmatrix} \mathsf{K} & \mathsf{K}_{0100} \\ \mathsf{K}_{00\bar{1}0} & \mathsf{K}_{01\bar{1}0}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathsf{K} & \mathsf{K}_{1000} \\ \mathsf{K}_{00\bar{1}0} & \mathsf{K}_{10\bar{1}0}\end{vmatrix}} = 0, \quad \text{d. h. } \lim (z_1+\bar{z}_1)|\mathsf{T}^{\mathfrak{B}}_{1\bar{2}}| = \lim (z_1+\bar{z}_1)\left|\frac{\begin{vmatrix} \mathsf{K} & \mathsf{K}_{0100} \\ \mathsf{K}_{00\bar{1}0} & \mathsf{K}_{01\bar{1}0}\end{vmatrix}}{\mathsf{K}^2}\right| = 0$$

folgt. Aus (2. 55), (2. 58) und (2. 63) folgt (2. 42).

§ 3.

In den §§ 3—5 werden Limesrelationen bei Annäherung an die Limespunkte Q_3 dritter Ordnung für gewisse Familien von Funktionen angegeben, und es wird ferner gezeigt, daß die Minimalfunktionen $\mathsf{M}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; t_1, t_2) = \dfrac{\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)}{\mathsf{K}_{\mathfrak{B}}(t_1, t_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)}$ von $\mathfrak{B}$ mit dem Aufpunkt in $\{t_1, t_2\}$ zu dieser Funktionenfamilie gehören.

Bei diesen Überlegungen werden mit t_1, t_2 bzw. z_1, z_2 stets die in bezug auf den Randpunkt Q_3 normalen Koordinaten bezeichnet, was nicht mehr hervorgehoben wird. Wie im § 2 hingewiesen wurde, wird die Randhyperfläche in der Umgebung von Q_3 durch (2. 3) gegeben. Durch eine Transformation von der Form (2. 5) gelangen wir zu dem kanonischen Ersetzungskörper $\mathfrak{B}^*$, wobei die Gleichung der Randhyperfläche $\mathfrak{b}^{*3}$ in der Umgebung von Q_3 auf die spezielle Gestalt (2. 6) gebracht wird.

Wir wollen nun zeigen: Aus den im § 2 über ψ_3 gemachten Voraussetzungen folgt, daß eine Konstante A so existiert, daß

$$\text{(3. 1)}\qquad |\psi_3^*(y_1^*, z_2^*, \bar{z}_2^*)| \leqq A[|y_1^*|^3 + |z_2^*|^3]$$

gilt. Es genügt, offenbar zu zeigen, daß (3. 1) in einer genügend kleinen Umgebung von Q_3 gilt.

Ersetzt man nach (2. 5) in (2. 4) x_1, y_1 durch die Real- und Imaginärteile von $(x_1^* + iy_1^*) + 2b(x_1^* + iy_1^*)(x_2^* + iy_2^*) + \cdots$, x_2, y_2 durch x_2^*, y_2^*, so erhält man eine Gleichung von der Form $\Phi^*(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*) = 0$. Da nun das Transformationspaar (2. 5) den Punkt Q_3 in sich und eine genügend kleine Umgebung von Q_3 im $z_1 z_2$-Raume in eine ebensolche Umgebung von Q_3 im $z_1^* z_2^*$-Raume eineindeutig und stetig überführt, wird

$$\Phi^*(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*) \not\equiv 0, \qquad \left[\frac{\partial \Phi^*(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)}{\partial x_1^*}\right]_{x_1^*=y_1^*=x_2^*=y_2^*=0} \neq 0, \qquad \Phi^*(0,0,0,0) = 0$$

gelten. Nach dem Satz über implizite Funktionen [35]) läßt sich $\Phi^* = 0$ in einer genügend kleinen Umgebung $|y_1^*| \leqq \delta$, $|x_2^*| \leqq \delta$, $|y_2^*| \leqq \delta$ in der Form

$$\text{(3. 2)}\qquad x_1^* = \psi^*(y_1^*, x_2^*, y_2^*)$$

darstellen. Da Φ dreimal stetig differenzierbar vorausgesetzt war und das Transformationspaar (2. 5) analytisch ist, wird Φ^* und somit auch ψ^* nach allen Veränderlichen dreimal stetig differenzierbar sein. Eine formale Rechnung zeigt, daß die Glieder ersten

[35]) Vgl. z. B. Osgood, Funktionentheorie I, S. 69.

und zweiten Grades die in (2. 6) angegebene Form haben, während $\psi_3^*(y_1^*, z_2^*, \bar{z}_2^*)$ eine in $y_1^* = z_2^* = 0$ dreimal stetig differenzierbare Funktion ist, für die die ersten beiden Ableitungen nach alle Veränderlichen verschwinden.

Nach dem ersten Mittelwertsatz kann man

$$\psi_3^*(y_1^*, z_2^*, \bar{z}_2^*) = A_1 y_1^{*3} + A_2 y_1^{*2} z_2^* + \cdots + A_8 z_2^{*2} \bar{z}_2^* + A_9 z_2^* \bar{z}_2^{*2}$$

setzen, wobei $A_k \equiv A_k(y_1^*, z_2^*, \bar{z}_2^*)$ in der Umgebung von $y_1^* = z_2^* = 0$ gleichmäßig beschränkte Funktionen sind; bezeichnet man mit $\frac{A}{18}$ eine obere Schranke für die A_k, so gelangt man zu (3. 1), w. z. b. w. [36]).

p-gekoppelte Annäherung eines Punktpaares.

Unter einer *p*-gekoppelten Punktpaarfolge ($p > 0$)

$$\{z_1, z_2, t_1, t_2\}, \quad z_k = x_k + iy_k, \quad t_k = u_k + iv_k, \quad x_1 > 0, u_1 > 0 \text{ [37]}$$

verstehen wir eine Folge, bei der zwischen den x_1- und u_1-Koordinaten einander entsprechender Punkte $\{z_1, z_2\}$ und $\{t_1, t_2\}$ stets die Ungleichung

$$0 < m \leqq \frac{u_1^p}{x_1} \leqq M < \infty \tag{3. 3}$$

gilt, wobei m, M (geeignet gewählte) von *der Lage der Punkte unabhängige Konstanten* sind.

Konvergieren außerdem die Punkte $\{z_1, z_2\}$, $\{t_1, t_2\}$ nach Q_3 im Sinne der Annäherung A^{I}, so werden wir von einer *p*-gekoppelten A^{I}-Annäherung des Punktpaares oder kurz von einer *p*-gekoppelten A^{I}-Punktfolge sprechen.

Wie in K § 3 hingewiesen wurde, geht man von einem normalen Koordinatensystem z_1, z_2 zu einem andern z_1', z_2' vermittels einer Transformation von der Form [3. 3] über.

Wir wollen nun zeigen, daß die angegebene *Definition der p-gekoppelten* A^{I}*-Annäherung von der speziellen Wahl eines normalen Koordinatensystems unabhängig ist.*

Da, wie in K § 3 näher ausgeführt wurde, eine im Sinne von A^{I} im $z_1 z_2$-Raume konvergierende Punktfolge in eine ebenso im $z_1' z_2'$-Raume konvergierende übergeht, braucht man nur zu zeigen, daß aus (3. 3) eine analoge Abschätzung für $\frac{u_1'^p}{x_1'}$ folgt.

Nun ist [38]) (vgl. [3. 6] und [3. 4])

$$\frac{(2u_1')^p}{2x_1'} = \frac{(t_1' + \bar{t}_1')^p}{z_1' + \bar{z}_1'} = \frac{\left[\tau + \dfrac{g_{12}(t_1, t_2) + \overline{g_{12}(t_1, t_2)}}{\sqrt{|t_1|^2 + |t_2|^2}} \cdot \dfrac{\sqrt{|t_1|^2 + |t_2|^2}}{t_1 + \bar{t}_1}\right]^p}{\tau + \dfrac{g_{12}(z_1, z_2) + \overline{g_{12}(z_1, z_2)}}{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}} \cdot \dfrac{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}}{z_1 + \bar{z}_1}} \cdot \frac{(t_1 + \bar{t}_1)^p}{z_1 + \bar{z}_1}$$

$$= \frac{\left[\tau + \Omega \dfrac{\sqrt{|t_1|^2 + |t_2|^2}}{t_1 + \bar{t}_1}\right]^p}{\tau + \Omega \dfrac{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}}{z_1 + \bar{z}_1}} \cdot \frac{(t_1 + \bar{t}_1)^p}{z_1 + \bar{z}_1}.$$

---

[36]) Da der Körper $\mathfrak{B}^*$ ganz im Endlichen liegt, kann man annehmen, daß die gesamte Berandung $\mathfrak{b}^{*3}$ von $\mathfrak{B}^*$ in der Gestalt (2. 6) gegeben ist, wo für ψ_3^* die Ungleichung (3. 1) gilt (ev. wird die Konstante A vergrößert) und ψ_3^* in der Umgebung von Q_3 die angegebenen Eigenschaften hat. (ψ_3^* kann außerhalb der Umgebung von Q_3 natürlich auch mehrdeutig sein.)

[37]) Wir lassen bei den folgenden Überlegungen, mit Ausnahme der Betrachtungen auf den S. 111 f., die Sterne bei z_1^*, z_2^* weg.

[38]) Wegen der Einzelheiten zu diesen Betrachtungen vgl. K § 3.

Da nun bei der Annäherung A^{I} (2. 7) gilt, wird für eine genügend kleine Umgebung von Q_3

$$km \leqq k\frac{u_1^p}{x_1} \leqq \frac{u_1'^p}{x_1'} \leqq K\frac{u_1^p}{x_1} \leqq KM \tag{3. 4}$$

sein, wo $0 < k < K < \infty$ ist. Da man die Relation (3. 3) nur für genügend kleine Werte der Veränderlichen zu beweisen braucht, folgt aus (3. 4), daß die Folge $\{z_1', z_2', t_1', t_2'\}$ ebenfalls p-gekoppelt ist, w. z. b. w.

Für die folgenden Betrachtungen ist es zweckmäßig, eine etwas andere als die soeben besprochene Interpretation einer p-gekoppelten A^{I}-Punktfolge zu geben.

Mit $\mathfrak{M}$ soll nur ein Teilbereich von $\mathfrak{W}_\alpha$ bezeichnet werden, für den außer (2. 7) noch

$$0 < c \leqq X_1 \leqq C < \infty \tag{3. 5}$$

gilt, wo c und C geeignet gewählte positive Konstanten sind, die so klein sind, daß $\mathfrak{W}_{C\alpha}$ in $\mathfrak{B}^*$ liegt.

Mit großen Buchstaben Z_1, Z_2 ($Z_k = X_k + iY_k$) bzw. T_1, T_2 ($T_k = U_k + iV_k$) sollen stets Koordinaten von Punkten von $\mathfrak{M}$ bezeichnet werden.

Wir wollen nun zeigen, daß man zu jeder p-gekoppelten Punktfolge $\{z_1^{(\nu)}, z_2^{(\nu)}, t_1^{(\nu)}, t_2^{(\nu)}\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, einen geeigneten Körper $\mathfrak{M}$ so konstruieren kann, daß

$$z_k^{(\nu)} = \frac{Z_k^{(\nu)}}{n_\nu^p}, \quad t_k^{(\nu)} = \frac{T_k^{(\nu)}}{n_\nu}, \quad \lim_{\nu\to\infty} n_\nu = \infty$$

ist, wobei $\{Z_1^{(\nu)}, Z_2^{(\nu)}\}$ und $\{T_1^{(\nu)}, T_2^{(\nu)}\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, zwei *in $\mathfrak{M}$ gelegene Punktfolgen* bedeuten. Sei $d > 0$. Wir wählen $n_\nu = \dfrac{d}{u_1^{(\nu)}}$, d. h. setzen $U_1^{(\nu)} = d$. Aus $\lim u_1^{(\nu)} = 0$ folgt $\lim\limits_{\nu\to\infty} n_\nu = \infty$. Aus (3. 3) folgt ferner, daß

$$\frac{d^p}{M} \leqq X_1^{(\nu)} = x_1^{(\nu)} n_\nu^p \leqq \frac{u_1^{(\nu)p} n_\nu^p}{m} = \frac{d^p}{m} \tag{3. 6}$$

ist. Da andererseits $\dfrac{\sqrt{|Z_1^{(\nu)}|^2 + |Z_2^{(\nu)}|^2}}{X_1^{(\nu)}} = \dfrac{\sqrt{|z_1^{(\nu)}|^2 + |z_2^{(\nu)}|^2}}{x_1^{(\nu)}} < \dfrac{1}{\cos\alpha}$ gilt, folgert man, daß die Punktfolgen $\{Z_1^{(\nu)}, Z_2^{(\nu)}\}$ und $\{T_1^{(\nu)}, T_2^{(\nu)}\}$ in einem Körper $\mathfrak{M}$ liegen mit

$$c = \min\left(d, \frac{d^p}{M}\right), \quad C = \max\left(d, \frac{d^p}{M}\right).$$

Ist umgekehrt eine Punktpaarfolge $\left\{\dfrac{Z_1^{(\nu)}}{n_\nu^p}, \dfrac{Z_2^{(\nu)}}{n_\nu^p}, \dfrac{T_1^{(\nu)}}{n_\nu}, \dfrac{T_2^{(\nu)}}{n_\nu}\right\}$ gegeben, in der für $X_1^{(\nu)}$ und $U_1^{(\nu)}$ (3. 5) gilt, so ist $\dfrac{c^p}{C} \leqq \dfrac{u_1^{(\nu)p}}{x_1^{(\nu)}} \leqq \dfrac{C^p}{c}$, d. h. die betreffende Folge ist im Sinne der ersten Definition p-gekoppelt.

§ 4.

Satz III. *Es sei jedem Punkte $\{t_1, t_2\}$ einer in $\mathfrak{W}_\alpha$ liegenden Punktfolge $\mathfrak{P}^0$ mit $\lim\{t_1, t_2\} = Q_3$ eine in $\mathfrak{B}$ reguläre und quadratischintegrierbare Funktion $f(z_1, z_2; t_1, t_2)$ der beiden komplexen Veränderlichen z_1, z_2 zugeordnet. Jede Funktion dieser Schar habe die folgenden zwei Eigenschaften:*

1. *Es ist*

$$f(t_1, t_2; t_1, t_2) = 1; \tag{4. 1}$$

2. *die Integrale* $\int_{\mathfrak{B}} |f(z_1, z_2; t_1, t_2)|^2 \, d\omega_z$ *genügen für* $\{t_1, t_2\} < \mathfrak{P}^0$ *der Ungleichung*

$$\int_{\mathfrak{B}} |f(z_1, z_2; t_1, t_2)|^2 \, d\omega_z \leqq \frac{\pi^2}{2\sigma} (t_1 + \bar{t}_1)^3 [1 + C(t_1 + \bar{t}_1)^r], \tag{4. 2}$$

wobei $C < \infty$, $r > 0$ *feste von* $\{t_1, t_2\}$ *unabhängige Konstanten sind und* σ *die in der Entwicklung* (2. 4) *auftretende für den Randpunkt* Q_3 *charakteristische Größe bedeutet.*

Für jedes p *mit* $\max\left(1 - \frac{r}{3}, \frac{14}{15}\right) < p \leqq 1$ *gilt dann bei einer p-gekoppelten* A^1*-Annäherung des Punktpaares* $\{z_1, z_2, t_1, t_2\}$ *gleichmäßig* [39]) (*in Bezug auf jeden Annäherungsweg innerhalb* $\mathfrak{W}_\alpha$)

$$\lim \frac{z_1^3}{(t_1 + \bar{t}_1)^3} f(z_1, z_2; t_1, t_2) = 1 \text{ für } p < 1, \tag{4. 3}$$

$$\lim \frac{(z_1 + \bar{z}_1)^3}{(t_1 + \bar{t}_1)^3} f(z_1, z_2; t_1, t_2) = 1 \text{ für } p = 1. \tag{4. 4}$$

Den Beweis des Satzes führen wir unter der Benutzung der Behauptungen I—IV, die (der Übersichtlichkeit wegen) nachträglich im § 5 bewiesen werden.

Durch die Transformation (2. 5) ersetzen wir $\mathfrak{B}$ durch seinen kanonischen Ersetzungskörper $\mathfrak{B}^*$ (bei dem die Randhyperfläche in der Umgebung von $Q_3^* = Q_3$ durch (2. 6) gegeben wird). Betrachtet man nun in $\mathfrak{B}^*$ die Funktion

$$f^*(z_1^*, z_2^*; t_1^*, t_2^*) = f[z_1(z_1^*, z_2^*), z_2(z_1^*, z_2^*); t_1(t_1^*, t_2^*), t_2(t_1^*, t_2^*)] \frac{E(z_1^*, z_2^*)}{E(t_1^*, t_2^*)}, \tag{4. 5}$$

$$E(z_1^*, z_2^*) = \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(z_1^*, z_2^*)},$$

für die $f^*(t_1^*, t_2^*; t_1^*, t_2^*) = 1$ gilt, so befriedigen (wie in Ia gezeigt wird) die Integrale $\int_{\mathfrak{B}} |f^*(z_1^*, z_2^*; t_1^*, t_2^*)|^2 \, d\omega_z$ eine Ungleichung von der Gestalt (4. 2). Andererseits kann man aus der Tatsache, daß f^* die Limesrelationen (4. 3) und (4. 4) erfüllt, leicht auf das Bestehen der gleichen Limesverhältnisse für f schließen (siehe Ib).

Um die Relationen (4. 3) und (4. 4) für f^* [40]) zu beweisen, konstruieren wir eine Folge von (nachträglich in II auf S. 112 näher beschriebenen) inneren Vergleichskörpern $\mathfrak{Z}_n$. Die Betrachtungen von III und II (vgl. S. 118) führen zu dem folgenden Ergebnis: *Sei* $\{Z_1, Z_2\}$ *bzw.* $\{T_1, T_2\}$ (unserer früheren Festsetzung gemäß) *ein beliebiger Punkt von* $\mathfrak{M}$. *Es ist dann* $\left\{\frac{T_1}{n}, \frac{T_2}{n}\right\} < \mathfrak{Z}_n$ *und*

$$\int_{\mathfrak{Z}_n} \left| \mathsf{M}_{\mathfrak{Z}_n}\left(z_1, z_2; \frac{T_1}{n}, \frac{T_2}{n}\right)\right|^2 d\omega_z = \frac{\pi^2}{2n^3\sigma} (T_1 + \bar{T}_1)^3 \left[1 + \frac{B(n, T_1, T_2; \bar{T}_1, \bar{T}_2)}{n^{\frac{1}{5}}}\right], \tag{4. 6}$$

wobei B *eine für* $n > n_0$ *und* $\{T_1, T_2\} < \mathfrak{M}$ (*gleichmäßig*) *beschränkte Funktion bedeutet.*

Ferner gilt für jedes p *mit* $\frac{4}{5} \leqq p \leqq 1$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{Z_1 + \frac{\bar{T}_1}{n^{1-p}}}{n^p}\right)^3 \left(\frac{n}{T_1 + \bar{T}_1}\right)^3 \mathsf{M}_{\mathfrak{Z}_n}\left(\frac{Z_1}{n^p}, \frac{Z_2}{n^p}; \frac{T_1}{n}, \frac{T_2}{n}\right) = 1. \tag{4. 7}$$

---

[39]) Voraussetzungsgemäß wird bei unseren Betrachtungen der Winkelraum $\mathfrak{W}_\alpha$ [d. h. α in (2. 7)] festgehalten.

[40]) Mit Ausnahme der Ausführungen in I lassen wir von nun an bei f^*, z_1^*, z_2^*, t_1^*, t_2^* die Sterne weg.

Wir führen nun die Folge der Hilfsfunktionen

$$(4.\,8)\qquad h\left(z_1, z_2; \frac{T_1}{n}, \frac{T_2}{n}\right) = f\left(z_1, z_2; \frac{T_1}{n}, \frac{T_2}{n}\right) - \mathsf{M}_{\mathfrak{Z}_n}\left(z_1, z_2; \frac{T_1}{n}, \frac{T_2}{n}\right)$$

ein, von denen jede in dem zugehörigen $\mathfrak{Z}_n$ regulär ist. Unter Verwendung des (nachträglich bewiesenen) Hilfssatzes II ergibt sich für $n > n_0$ (n_0 kann unabhängig von $\{T_1, T_2\} < \mathfrak{M}$ gewählt werden) aus (4. 2) und (4. 6) (vgl. S. 120)

$$(4.\,9)\qquad \int\limits_{\mathfrak{Z}_n} \left| h\left(z_1, z_2; \frac{T_1}{n}, \frac{T_2}{n}\right)\right|^2 d\omega_z \leqq \frac{c_1}{n^{3+\varrho}}\ ^{41}), \qquad \varrho = \min\left(r, \frac{1}{5}\right).$$

Andererseits existiert, wie in III gezeigt wird, zu jedem Punkt $\{Z_1, Z_2\}$ von $\mathfrak{M}$ und für jedes $n > n_0$ ein *Bizylinder* $\mathfrak{E}\left(\frac{Z_1}{n^p}, \frac{Z_2}{n^p}\right)$ *mit dem Mittelpunkt in* $\left\{\frac{Z_1}{n^p}, \frac{Z_2}{n^p}\right\}$ *und dem Volumen* $\frac{c_2}{n^{3p}}$, *der noch ganz in* $\mathfrak{Z}_n$ *liegt.* Dabei ist $c_2 = \pi^2\tau^3$, wo τ die in III angegebene Konstante bedeutet.

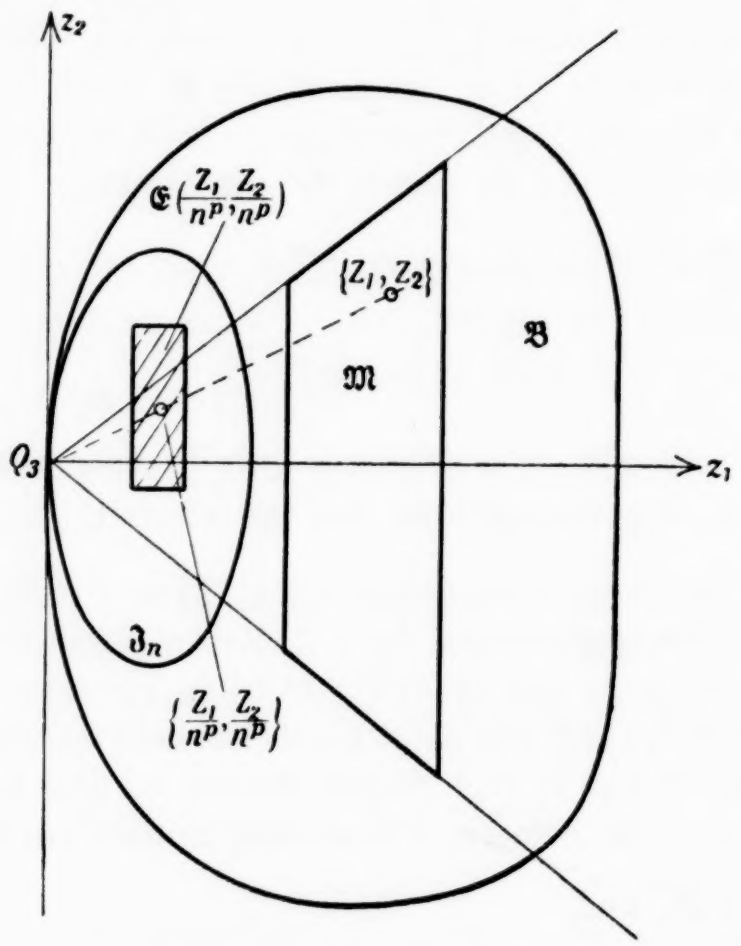

Abb. 1. (Schematische Darstellung).

Für jede in einem Reinhardtschen Kreisbereiche $\mathfrak{R}$ reguläre Funktion $g(Z_1, Z_2)$ gilt ein (bereits früher bewiesener) Satz, der besagt, daß für den Wert von g in dem Mittelpunkte (ζ_1, ζ_2) von $\mathfrak{R}$ die Ungleichung

$$(4.\,10)\qquad |g(\zeta_1, \zeta_2)|^2 \leqq \frac{\int\limits_{\mathfrak{B}} |g(Z_1, Z_2)|^2\, d\omega}{\text{Vol.}\,(\mathfrak{R})}$$

gilt [42]). Da aus $\{Z_1, Z_2\} < \mathfrak{M}$ (wie in III gezeigt ist) $\mathfrak{E}\left(\frac{Z_1}{n^p}, \frac{Z_2}{n^p}\right) < \mathfrak{Z}_n$ folgt, gilt für

[41]) Die c_k, $k = 1, 2, 3, 4$, sind feste sowohl von $n(> n_0)$ wie von $\{T_1, T_2\} < \mathfrak{M}$ unabhängige Konstanten.
[42]) Vgl. H (siehe [2])), Hilfssatz I, S. 649.

$h\left(z_1, z_2; \frac{T_1}{n}, \frac{T_2}{n}\right)$, das in $\mathfrak{E}\left(\frac{Z_1}{n^p}, \frac{Z_2}{n^p}\right)[< \mathfrak{Z}_n]$ regulär ist, nach (4. 10)

$$(4.\,11)\quad \left|h\left(\frac{Z_1}{n^p}, \frac{Z_2}{n^p}; \frac{T_1}{n}, \frac{T_2}{n}\right)\right| \leqq \sqrt{\frac{\int\limits_{\mathfrak{E}\left(\frac{Z_1}{n^p}, \frac{Z_2}{n^p}\right)} |h|^2\, d\omega}{\text{Vol.}\left[\mathfrak{E}\left(\frac{Z_1}{n^p}, \frac{Z_2}{n^p}\right)\right]}} \leqq \sqrt{\frac{\int\limits_{\mathfrak{Z}_n} |h|^2\, d\omega}{\text{Vol.}\left[\mathfrak{E}\left(\frac{Z_1}{n^p}, \frac{Z_2}{n^p}\right)\right]}} \leqq \sqrt{\frac{c_3}{n^{3+\varrho-3p}}} = \frac{c_4}{n^{1,5+\frac{1}{2}\varrho-1,5p}},$$

d. h.

$$(4.\,12)\qquad \left|n^{3-3p} h\left(\frac{Z_1}{n^p}, \frac{Z_2}{n^p}; \frac{T_1}{n}, \frac{T_2}{n}\right)\right| \leqq \frac{c_4}{n^{1,5p+\frac{1}{2}\varrho-1,5}}.$$

Sowohl die Funktionen $\mathsf{M}_{\mathfrak{Z}_n}\left(\frac{Z_1}{n^p}, \frac{Z_2}{n^p}; \frac{T_1}{n}, \frac{T_2}{n}\right)$ wie $h\left(\frac{Z_1}{n^p}, \frac{Z_2}{n^p}; \frac{T_1}{n}, \frac{T_2}{n}\right)$ sind für jedes n und $\{Z_1, Z_2\} < \mathfrak{M}$ erklärt. Wählt man nun $1 > p > \max\left(1 - \frac{r}{3}, \frac{14}{15}\right)$, so folgen aus (4. 7) und (4. 12) die Limesrelationen (4. 3) und (4. 4), womit vorbehaltlich der Annahmen I—IV der Beweis des Satzes III erbracht ist.

Die Minimalfunktion $\mathsf{M}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; t_1, t_2)$ erfüllt definitionsgemäß (4. 1) und nach [1. 12], [1. 11] und der nachträglich bewiesenen Beziehung (5. 41) die Ungleichung (4. 2). Es gilt somit das

Korollar. *Für die Minimalfunktion* $\mathsf{M}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; t_1, t_2)$ *von* $\mathfrak{B}$ *gelten bei p-gekoppelter* A^{I}*-Annäherung des Punktpaares* $\{z_1, z_2, t_1, t_2\} \to \{0,0,0,0\}$ *die in* (4. 3) *und* (4. 4) *angegebenen Limesrelationen.*

§ 5.

Wir gehen nunmehr zu dem nachträglichen Beweis der Annahmen I—IV über.

I. Wir zeigen, daß

a) für die in (4. 5) eingeführte Funktion $f^*(z_1^*, z_2^*; t_1^*, t_2^*)$ [43]) die Relation (4. 2) gilt,

b) aus den Limesrelationen (4. 3) bzw. (4. 4) für die Funktion $f^*(z_1^*, z_2^*; t_1^*, t_2^*)$ das Bestehen der gleichen Limesrelationen für $f(z_1, z_2; t_1, t_2)$ folgt.

Beweis. a) Infolge der Regularität von $t_1(t_1^*, t_2^*)$ in der Umgebung von $t_1^* = 0$, $t_2^* = 0$ gilt nach dem ersten Mittelwertsatz

$$t_1 = t_1^* + \boldsymbol{A}_1 t_1^{*2} + \boldsymbol{A}_2 t_1^* t_2^* + \boldsymbol{A}_3 t_2^{*2}, \qquad E(t_1^*, t_2^*) = 1 + \boldsymbol{A}_4 t_1^* + \boldsymbol{A}_5 t_1^*,$$

wobei $\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A}_k(t_1^*, t_2^*)$, $k = 1, 2, \ldots, 5$, in einer genügend kleinen Umgebung von $\{0, 0\}$ gleichmäßig beschränkte Funktionen von t_1^*, t_2^* sind. Nach (2. 7) gilt in $\mathfrak{W}_{\alpha^*}$

$$\frac{|t_k^*|}{t_1^* + \bar{t}_1^*} \leqq \frac{1}{\cos \alpha^*}, \qquad |\alpha^*| < \frac{\pi}{2}.$$

Es existiert deshalb eine endliche Konstante $\boldsymbol{A}$ so, daß für die angegebene Umgebung

$$(5.\,1)\quad (t_1 + \bar{t}_1) \leqq (t_1^* + \bar{t}_1^*)\,[1 + \boldsymbol{A}(t_1^* + \bar{t}_1^*)], \qquad \frac{1}{|E(t_1^*, t_2^*)|} \leqq 1 + \boldsymbol{A}(t_1^* + \bar{t}_1^*)$$

ist. Es gilt somit für $r < 1$ [44])

[43]) Es sei daran erinnert, daß die Koordinaten z_1^*, z_2^* sich auf den kanonischen Ersetzungskörper, z_1, z_2 auf den Ausgangskörper beziehen.

[44]) Ohne die Allgemeinheit zu beschränken, können wir $r < 1$ voraussetzen.

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{B}^*} |f^*(z_1^*, z_2^*; t_1^*, t_2^*)|^2 \, d\omega_{z^*} &= \frac{1}{|E(t_1^*, t_2^*)|^2} \int_{\mathfrak{B}} |f(z_1, z_2; t_1, t_2)|^2 \, d\omega_z \\ &\leqq \frac{\pi^2}{2\sigma} \frac{1}{|E(t_1^*, t_2^*)|^2} (t_1 + \bar{t}_1)^3 [1 + C(t_1 + \bar{t}_1)^r] \\ &\leqq \frac{\pi^2}{2\sigma} (t_1^* + \bar{t}_1^*)^3 [1 + A(t_1^* + \bar{t}_1^*)]^2 [1 + C(t_1^* + \bar{t}_1^*)^r (1 + A(t_1^* + \bar{t}_1^*))^r] \\ &\leqq \frac{\pi^2}{2\sigma} (t_1^* + \bar{t}_1^*)^3 [1 + C^*(t_1^* + \bar{t}_1^*)^r] ,\end{aligned} \tag{5. 2}$$

wo C^* eine geeignet gewählte Konstante bedeutet. Dadurch ist a) bewiesen.

b) Analog kann man für z_1^* und $\dfrac{1}{D(z_1, z_2)} = E(z_1^*, z_2^*)$ schreiben:

$$z_1^* = z_1 + B_1 z_1^2 + B_2 z_1 z_2 + B_3 z_2^2, \qquad \frac{1}{D(z_1, z_2)} = 1 + B_4 z_1 + B_5 z_2 ,$$

wobei die $B_k \equiv B_k(z_1, z_2)$ in einer genügend kleinen Umgebung des Koordinatenanfangspunktes gleichmäßig beschränkte Funktionen von z_1, z_2 sind. Es folgt deshalb zunächst, daß bei einer A^{I}-Annäherung

$$\lim \frac{z_1^*}{z_1} = 1 \quad \left(\text{und somit auch } \lim \frac{t_1^* + \bar{t}_1^*}{t_1 + \bar{t}_1} = 1\right) \tag{5. 3}$$

gilt. Ferner ist bei der 1-gekoppelten A^{I}-Annäherung des Punktpaares $\{z_1, z_2, t_1, t_2\}$

$$\frac{z_1^* + \bar{t}_1^*}{z_1 + \bar{t}_1} = 1 + (z_1 + \bar{t}_1) \frac{B_1 z_1^2 + \bar{B}_1 \bar{t}_1^2 + B_2 z_1 z_2 + \bar{B}_2 \bar{t}_1 \bar{t}_2 + \bar{B}_3 z_2^2 + \bar{B}_3 \bar{t}_2^2}{(z_1 + \bar{t}_1)^2} .$$

Andererseits ist $|z_1 + \bar{t}_1| > x_1$ (da $x_1 > 0$, $u_1 > 0$ ist), wobei

$$|z_k| \leqq \frac{x_1}{\cos \alpha}, \qquad |t_k| \leqq \frac{u_1}{\cos \alpha} \leqq \frac{M x_1}{\cos \alpha}$$

ist, woraus die gleichmäßige Beschränktheit des Koeffizienten bei $z_1 + \bar{t}_1$ und somit im Falle $p = 1$ in (3. 3)

$$\lim \frac{z_1^* + \bar{t}_1^*}{z_1 + \bar{t}_1} = 1 \tag{5. 4}$$

folgt.

II. Wir gehen nunmehr zur Aufstellung der Vergleichskörper $\mathfrak{J}_n$ und $\mathfrak{A}_n$ [45]), $n = 1, 2, 3, \ldots$, über. Diese entstehen aus den Hyperkugeln (2. 12) (die mit $\mathfrak{K}_{\sigma_{kn}}$ bezeichnet werden) mit den Radien

$$\frac{1}{\sigma_{1n}} = \frac{1}{\sigma + \dfrac{D_1}{n^{\frac{1}{5}}}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\sigma_{2n}} = \frac{1}{\sigma - \dfrac{D_2}{n^{\frac{1}{5}}}} \tag{5. 5}$$

vermittels der Transformationen (2. 13) bzw. (2. 14), wobei

$$\beta_{kn} = C_k n^{\frac{4}{5}} \tag{5. 6}$$

zu setzen ist. Die in (2. 13) und (2. 14) auftretenden α_k, wie auch $D_k, C_k, k = 1, 2$, sind feste von n unabhängige Größen, auf deren Bestimmung nachträglich eingegangen werden soll. Wir gehen zu ihrer Bestimmung und zu dem Nachweis über, daß die auf diese Weise erhaltenen Körper innere bzw. äußere Vergleichskörper von $\mathfrak{B}^*$ in bezug auf Q_3

[45]) Die äußeren Vergleichskörper werden im Korrolar, beim Nachweis, daß die Minimalfunktion die Relation (4. 2) erfüllt, herangezogen. Wir werden bei allen Größen, die mit n variieren, den Index n beifügen.

sind. Da alle diese Körper den Koordinatenanfangspunkt Q_3 zum Randpunkt haben und $x = 0$ allen gemeinsame Tangentialhyperebene ist, braucht nur gezeigt zu werden, daß

(5. 7) $\mathfrak{J}_n < \mathfrak{B}^*$ bzw. (5. 8) $\mathfrak{B}^* < \mathfrak{A}_n$

gilt. In K § 5 wurden die gleichen Beziehungen (vgl. [5. 16] und [5. 33]) auf die Weise bewiesen, daß man zunächst einen Körper $\mathfrak{K}_{\alpha_1}$ aus $\mathfrak{K}_{\sigma_1 n}$ vermittels der Transformation [5. 5]: $z_1' = \dfrac{1}{1 + \alpha_1 z_1}$, $z_2' = z_2$ konstruiert hat und zeigt, daß derjenige Teil von $\mathfrak{K}_{\alpha_1}$, der dem Bizylinder

(5. 9) $|z_1| < l_1$

angehört, in $\mathfrak{B}^*$ liegt. Durch eine weitere Transformation [5. 13]: $z_1'' = z_1'$, $z_2'' = \dfrac{z_2'}{1 + \beta_1 z_1'}$ wurde dann erreicht, daß der übrige Teil von $\mathfrak{K}_{\alpha_1}$ so zusammengedrückt wurde, daß für den nunmehr entstandenen Körper $\mathfrak{K}_{\alpha_1 \beta_1}$, jetzt mit $\mathfrak{J}_n$ bezeichnet, (5. 7) gilt. Mit einer ähnlichen Methode wurde der Nachweis von (5. 8) geführt. Mit $\mathfrak{B}_k^2$ wurde dabei die Gesamtheit der Punkte von $\mathfrak{B}^* \cdot (z_2 = 0)$ bezeichnet, für die $|z_1| \geqq l_k$, $k = 1, 2$, gilt. (Siehe dazu [23]).

Die Verhältnisse sind jetzt insofern etwas anders als im § 5 der Arbeit K, weil wir jetzt eine unendliche Folge von Bereichen $\mathfrak{J}_n$ bezw. $\mathfrak{A}_n$ haben, die (da $\lim\limits_{n \to \infty} \beta_{kn} = \infty$ ist) bei $n \to \infty$ gegen eine Scheibe bzw. einen sich ins Unendliche erstreckenden Körper konvergieren, und weil die l_{kn}, $k = 1, 2$, gegen Null gehen.

Wir müssen deshalb einige etwas schärfere Abschätzungen als im § 5 der Arbeit K gewinnen, die die Anwendung der geschilderten Methode ermöglichen.

Wir beginnen mit der Aufstellung einiger Ungleichungen.

1. *Es gibt eine von n unabhängige Konstante $P_1 \equiv P_1(\alpha_1)$ so, daß für alle Punkte $\{z_1, z_2\}$ jedes $\mathfrak{K}_{\alpha_1 n}$ die Ungleichung*

(5. 10) $|z_2| \leqq P_1(\alpha_1)\, |z_1|^{\frac{1}{2}}$ *gilt.*

Die Hyperkugel (2. 12), bei der speziell $\sigma_{kn} = \sigma$ gesetzt ist, soll mit $\mathfrak{K}_\sigma$ bezeichnet werden. Der vermittels (2. 13) aus $\mathfrak{K}_\sigma$ entstandene Bereich soll $\mathfrak{K}_{\alpha_1}$ heißen. Da $\mathfrak{K}_{\sigma_1 n} < \mathfrak{K}_\sigma$ gilt, und somit $\mathfrak{K}_{\alpha_1 n} < \mathfrak{K}_{\alpha_1}$, $\mathfrak{K}_{\alpha_1 n} \cdot (z_1 = \gamma) < \mathfrak{K}_{\alpha_1} \cdot (z_1 = \gamma)$ ist, so genügt es, (5. 10) für $\mathfrak{K}_{\alpha_1}$ zu beweisen. Für eine genügend kleine Umgebung von Q_3 ist das Innere von $\mathfrak{K}_{\alpha_1}$ durch

(5. 11) $2x_1 - (2\alpha_1 + \sigma)\, y_1^2 - \sigma\, |z_2|^2 + \varphi_3\,(y_1, z_2, \bar{z}_2) > 0$

gegeben, wo für φ_3

(5. 12) $|\varphi_3(y_1, z_2, \bar{z}_2)| < B(|y_1|^3 + |z_2|^3)$, $B < \infty$ [46]),

gilt.

---

[46]) Die Existenz eines endlichen B in (5. 12) erschließt man folgendermaßen: Da $\mathfrak{K}_{\alpha_1}$ ein ganz im Endlichen gelegener Bereich ist, braucht man (5. 12) nur für genügend kleine Werte der Argumente zu beweisen, etwa wenn simultan $|y_1| < l, |z_2| < l$ ist, wobei l eine genügend kleine positive Zahl bedeutet. Nun ist der Rand von $\mathfrak{K}_{\alpha_1}$ durch

$$\Phi \equiv z_1 + \bar{z}_1 - (2\alpha_1 + \sigma)\, |z_1|^2 - \sigma\, |1 - \alpha_1 z_1|^2\, |z_2|^2 \equiv 2x_1 - (2\alpha_1 + \sigma)(y_1^2 + x_1^2) - \sigma\, |1 - \alpha_1 (x_1 + iy_1)^2|\, |z_2|^2 = 0$$

gegeben. Da $\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right)_{\substack{y_1 = 0 \\ z_2 = 0}} \neq 0$ ist, läßt sich für genügend kleine y_1, z_2, also etwa für $|y_1| \leqq l_1$, $|z_2| \leqq l_1$ die Gleichung $\Phi = 0$ umkehren, und wir erhalten $2x_1 = \psi(y_1, z_2, \bar{z}_2)$, wo ψ im angegebenen Gebiete eine beliebig oft differenzierbare Funktion ist. Unter Anwendung des Mittelwertsatzes erhält man nach einer einfachen Rechnung

$$\varphi_3(y_1, z_2, \bar{z}_2) = B_1 y_1^3 + B_2 y_1^2 z_2 + B_3 y_1 z_1^2 + \cdots + B_8 z_2 \bar{z}_2^2 + B_9 \bar{z}_2^3,$$

wo B_k in dem angegebenen Gebiete gleichmäßig beschränkte Funktionen von $y_1, z_2, \bar{z}_2$ sind. Ist B so groß gewählt, daß in dem betrachteten Gebiete $|B_k\,(y_1, z_2, \bar{z}_2)| \leqq \dfrac{B}{18}$ ist, so gelangt man zu (5. 12).

In jedem Punkte von $\mathfrak{R}_{\alpha_1}$, der zu dieser Umgebung gehört, gilt

$$2x_1 - (2\alpha_1 + \sigma)\, y_1^2 - \sigma\,|z_2|^2 + B|y_1|^3 + B|z_2|^3 > 0, \tag{5.13}$$

woraus (da man $l_1 < 1$ und somit $|y_1| < 1$ voraussetzen darf)

$$|z_2|^2\,[\sigma - B|z_2|] < 2x_1 - (2\alpha_1 + \sigma)\, y_1^2 + By_1^3 \leqq 2x_1 + By_1 \leqq (2 + B)\,|z_1|$$

folgt. Da nun $\mathfrak{R}_{\alpha_1} \cdot (z_1 = \gamma)$ für $\gamma \to 0$ in eine beliebig kleine Umgebung von $z_2 = 0$ rückt, folgt, daß für genügend kleines z_1, etwa für $|z_1| \leqq l = l(\alpha_1)$, $B|z_2| \leqq \frac{1}{2}\sigma$ ist, und daher in dieser Umgebung

$$|z_2| \leqq \sqrt{\frac{2(2 + B)}{\sigma}}\,|z_1|^{\frac{1}{2}} \tag{5.14}$$

gilt. Da $\mathfrak{R}_{\alpha_1}$ ganz im Endlichen liegt, folgt aus (5.14) bereits (5.10), indem man $P_1(\alpha_1) = \max\left[\sqrt{\frac{2(2 + B)}{\sigma}}, \frac{M}{\sqrt{l(\alpha_1)}}\right]$ setzt, wobei M das Maximum der Beträge der z_2-Koordinaten von $\mathfrak{R}_{\alpha_1}$ bedeutet.

Eine analoge Betrachtung führt zu dem Ergebnis:

2. *Es gibt eine Konstante $P_2 < \infty$ so, daß für alle Punkte $\{z_1, z_2\}$ von $\mathfrak{B}^*$*

$$|z_2| \leqq P_2|z_1|^{\frac{1}{2}} \tag{5.15}$$

gilt.

3. *Zu einem genügend großen E kann man eine positive Konstante P_3 so bestimmen, daß für jeden Punkt $\{z_1, z_2\}$ der Berandung $\mathfrak{b}^{*3}$ von $\mathfrak{B}^*$, für dessen z_1-Koordinate*

$$\left|z_1 - \frac{1}{E}\right| \leqq \frac{1}{E} \tag{5.16}$$

gilt,

$$|z_2| \geqq P_3(E)|z_1| \tag{5.17}$$

ausfällt.

Wir wählen E so groß, daß der Kreis (5.16) mit Ausnahme des Randpunktes $z_1 = 0$ ganz im Innern von $\mathfrak{B}^* \cdot (z_2 = 0)$ liegt. Es ist dann $E > a$ (wegen a siehe (2.6)), und man kann ein genügend kleines positives p so bestimmen, daß $E > a + Ap$ ist, und außerdem derjenige Teil von $\mathfrak{b}^{*3}$, für dessen z_1-Koordinaten $|z_1| < p$ gilt, in der Form (2.6) dargestellt werden kann, wobei für ψ_3 die Ungleichung (3.1) gilt. Zerlegt man den Kreis (5.16) in zwei Teile $\mathfrak{E}_1^2 + \mathfrak{E}_2^2$ so, daß zu $\mathfrak{E}_1^2$ alle Punkte $\{z_1, z_2\}$ mit $|z_1| < p$ gehören, so ist $\mathfrak{E}_2^2$ abgeschlossen und liegt im Inneren von $\mathfrak{B}^* \cdot (z_2 = 0)$. Für alle Punkte $\{z_1, z_2\}$ von $\mathfrak{b}^{*3}$, deren z_1-Koordinaten zu $\mathfrak{E}_2^2$ gehören, haben die zugehörigen $|z_1|$ eine untere Schranke ϱ, so daß für diesen Teil von $\mathfrak{b}^{*3}$ $|z_2| \geqq \frac{E\varrho}{2}|z_1|$ gilt. (5.17) braucht man also nur für diejenigen $\{z_1, z_2\}$ zu beweisen, für die $|z_1| < p$ ist. Nun ist dieser Teil von $\mathfrak{b}^{*3}$ durch (2.6) gegeben. Nach (2.6) und (3.1) ist

$$2x_1 - ay_1^2 = \sigma\,|z_2|^2 + \psi_3(y_1, z_2, \bar{z}_2) \leqq \sigma\,|z_2|^2 + A\,|y_1|^3 + A\,|z_2|^3$$

und somit (da man $|z_2| < 1$ annehmen darf)

$$|z_2|^2\,(\sigma + A) \geqq 2x_1 - y_1^2(a + A\,|y_1|); \tag{5.18}$$

andererseits ist nach (5.16) $|z_1|^2 \leqq \frac{2x_1}{E}$, und aus (5.18) folgt

$$|z_2|^2\,(\sigma + A) \geqq E|z_1|^2 - y_1^2(a + A\,|y_1|).$$

Setzt man nun $P_3 = \min\left(\frac{E\varrho}{2}, \sqrt{\frac{E - a - Ap}{\sigma + A}}\right)$, so gelangt man zu (5.17).

Bezeichnet man mit $\mathfrak{R}_{\alpha_2}$ den aus $\mathfrak{R}_\sigma$ vermittels $z_1' = \frac{z_1}{1-\alpha_2 z_1}$, $z_2' = z_2$ entstandenen Körper, so ist $\mathfrak{R}_{\alpha_2} < \mathfrak{R}_{\alpha_2 n}$ und $\mathfrak{R}_{\alpha_2} \cdot (z_1 = \gamma) < \mathfrak{R}_{\alpha_2 n} \cdot (z_1 = \gamma)$. Mit Hilfe einer der soeben durchgeführten analogen Überlegung schließt man:

4. *Für jedes $F > \sigma - 2\alpha_2$ gibt es eine von n_0 unabhängige positive Konstante $P_4 \equiv P_4(F)$ so, daß für alle Punkte $\{z_1, z_2\}$ der Berandung $\mathfrak{k}^3_{\alpha_2 n}$ von $\mathfrak{R}_{\alpha_2 n}$, für die*

$$\left| z_1 - \frac{1}{F} \right| \leqq \frac{1}{F} \tag{5. 20}$$

ist, die Ungleichung

$$|z_2| \geqq P_4(F)\,|z_1| \tag{5. 21}$$

gilt.

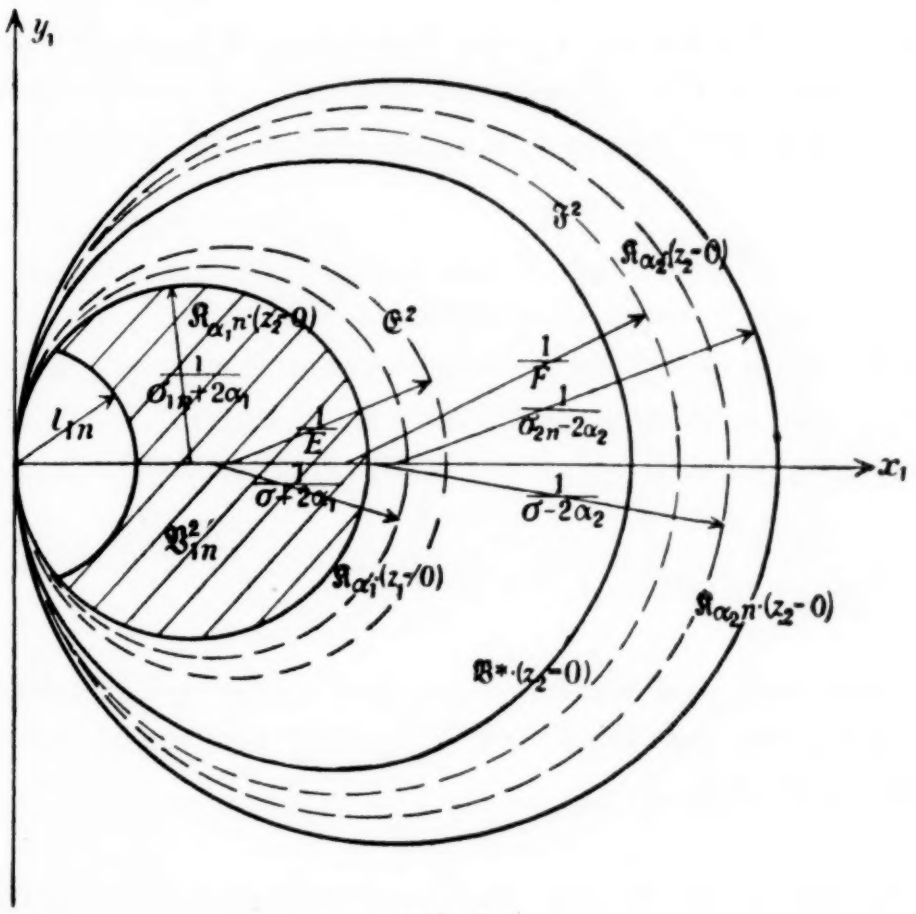

Abb. 2.

Nach dem die für das Folgende nötigen Abschätzungen 1.—4. abgeleitet wurden, gehen wir zum Beweis von (5. 7) und (5. 8) über. Wir bestimmen dabei α_1 so groß, daß $\mathfrak{R}_{\alpha_1} \cdot (z_1 = 0)$ im Kreise (5. 16) liegt. Dann ist

$$\sigma + 2\alpha_1 > E > a. \tag{5. 22}$$

Ferner setzen wir für die in (5. 9), (5. 5), (5. 6) auftretenden Konstanten l_1, D_1 und C_1

$$l_{1n} = \frac{1}{n^{\frac{2}{5}}}, \quad D_1 = (A+B)P_1, \text{ d. h. } \sigma_{1n} = \sigma + \frac{(A+B)P_1}{n^{\frac{1}{5}}}, \quad C_1 = \frac{1}{P_3\sigma}, \tag{5. 23}$$

wobei $P_1[P_3]$ das zu dem soeben gewählten $\alpha_1[E]$ laut 1. [3.] zugehörige $P_1(\alpha_1)[P_3(E)]$ bedeutet und A, B die in (3. 1) und (5. 12) angegebenen Größen sind.

Für ein genügend großes n liegt jeder Punkt $\{z_1, z_2\}$ von $\mathfrak{R}_{\alpha_1 n}$ mit $|z_1| \leqq l_{1n}$ in $\mathfrak{B}^*$; denn aus (5. 23) folgt, daß für $|z_1| \leqq l_{1n} \equiv \frac{1}{n^{\frac{2}{5}}}$

$$\sigma_{1n} - BP_1\,|z_1|^{\frac{1}{2}} > \sigma + AP_1\,|z_1|^{\frac{1}{2}}$$

und in Verbindung mit (5. 10)

$$\sigma_{1n} - B|z_2| > \sigma + A|z_2| \tag{5.24}$$

ist. Da ferner $y_1 \to 0$ für genügend großes n und somit nach (5.22)

$$\sigma_{1n} + 2\alpha_1 - B|y_1| > a + A|y_1|$$

ist, erschließt man aus (5.24) und (5.22):

$$\begin{aligned} (5.25)\quad 2x_1 - (\sigma_{1n} + 2\alpha_1)y_1^2 - \sigma_{1n}|z_2|^2 + \varphi_3(y_1, z_2, \bar{z}_2) \\ \leqq 2x_1 - (\sigma_{1n} + 2\alpha_1)y_1^2 - \sigma_{1n}|z_2|^2 + B|y_1|^3 + B|z_2|^3 \\ \leqq 2x_1 - ay_1^2 - \sigma|z_2|^2 - A|y_1|^3 - A|z_2|^3 \\ \leqq 2x_1 - ay_1^2 - \sigma|z_2|^2 + \psi_3(y_1, z_2, \bar{z}_2), \end{aligned}$$

d. h. jeder Punkt $\{z_1, z_2\}$ mit $|z_1| \leqq l_{1n}$ von $\mathfrak{K}_{\alpha_1 n}$ liegt (für genügend großes n) in $\mathfrak{B}^*$.

Nach (5.22) und (2.12) liegt $\mathfrak{K}_{\alpha_1 n} \cdot (z_2 = 0)$: $\left|z_1 - \frac{1}{\sigma_{1n} + 2\alpha_1}\right| \leqq \frac{1}{\sigma_{1n} + 2\alpha_1}$ in dem Kreis (5.16). Für die Punkte $\{z_1, z_2\}$ der Berandung $\mathfrak{b}^{*3}$ von $\mathfrak{B}^*$, deren z_1-Koordinaten zu (5.16) gehören, gilt (5.17). Bezeichnet man mit ϱ_n^* das Minimum der Beträge der z_2-Werte auf dem Rande $\mathfrak{b}^{*3}$, dessen z_1-Koordinaten zu $\mathfrak{B}_{1n}^2$ gehören, so gilt nach (5.17) und (5.23)

$$\varrho_n^* = \min_{z_1 < \mathfrak{B}_{1n}^2} |z_2| \geqq \frac{P_3}{n^{\frac{2}{5}}}. \tag{5.26}$$

Die Ungleichung [5.14] von K, die die hinreichende Bedingung dafür darstellt, daß der Körper $\mathfrak{J}_n (= \mathfrak{K}_{\alpha_1\beta_1}^{(n)})$, der vermittels (5.13) aus $\mathfrak{K}_{\alpha_1 n}$ entsteht, im Innern von $\mathfrak{B}^*$ liegt [47]), ist offenbar befriedigt; denn es ist nach (5.23), (2.13), (5.6), (5.26)

$$\frac{1}{\sigma_{1n}|1 + \beta_{1n} z_1|} \leqq \frac{1}{\sigma|\beta_{1n} z_1|} \leqq \frac{1}{\sigma\left|\frac{n^{\frac{4}{5}}}{P_3\sigma} \cdot \frac{1}{n^{\frac{2}{5}}}\right|} = \frac{P_3}{n^{\frac{2}{5}}} \leqq \varrho_n^*. \tag{5.27}$$

Damit ist (5.7) bewiesen, und wir gehen zu dem äußeren Vergleichskörper über. Wir wählen F so, daß (5.20) den Bereich $\mathfrak{B}^* \cdot (z_2 = 0)$ im Innern enthält (woraus $a > F$ folgt), bestimmen α_2 so, daß

$$a > F > \sigma - 2\alpha_2$$

ist, und setzen für die in (5.5) und (5.6) auftretenden Konstanten die Werte

$$(5.28)\quad l_{2n} = \frac{1}{n^{\frac{2}{5}}}, \quad D_2 = (A + B)P_2, \text{ d. h. } \sigma_{2n} = \sigma - \frac{(A + B)P_2}{n^{\frac{1}{5}}}, \quad C_2 = \frac{\mathsf{P}}{P_4},$$

wo P eine obere Schranke für die Beträge der z_2-Koordinaten des Körpers $\mathfrak{B}^*$ und P_4 das zu dem gewählten F laut 4. zugehörige $P_4(F)$ bedeutet ($\mathfrak{B}^*$ ist beschränkt, P ist also endlich). Aus (5.28) folgt, daß für die Punkte $\{z_1, z_2\}$ von $\mathfrak{B}^*$, für die $|z_1| \leqq l_{2n} \equiv \frac{1}{n^{\frac{2}{5}}}$ ist,

$$\sigma - AP_2|z_1|^{\frac{1}{2}} \geqq \sigma_{2n} + BP_2|z_1|^{\frac{1}{2}}$$

und in Verbindung mit (5.15)

$$\sigma - A|z_2| \geqq \sigma_{2n} + B|z_2| \tag{5.29}$$

gilt, woraus unter Verwendung von (5.5) und unter der Berücksichtigung, daß für genügend großes n $a - A|y_1| > \sigma - 2\alpha_2 + B|y_1|$ ist,

$$\begin{aligned} (5.30)\quad 2x_1 - ay_1^2 - \sigma|z_2|^2 + \psi_3(y_1, z_2, \bar{z}_2) \leqq 2x_1 - ay_1^2 - \sigma|z_2|^2 + A|y_1|^3 + A|z_2|^3 \\ \leqq 2x_1 - (\sigma_{2n} - 2\alpha_2)y_1^2 - \sigma_{2n}|z_2|^2 - B|y_1|^3 - B|z_2|^3 \\ \leqq 2x_1 - (\sigma_{2n} - 2\alpha_2)y_1^2 - \sigma_{2n}|z_2|^2 + \varphi_3(y_1, z_2, \bar{z}_2) \end{aligned}$$

folgt, d. h. jeder Punkt $\{z_1, z_2\}$ von $\mathfrak{B}^*$ mit $|z_1| \leqq l_{2n}$ liegt in $\mathfrak{K}_{\alpha_1 n}$.

[47]) Wegen des Beweises, daß aus [5.14] die Beziehung $\mathfrak{K}_{\alpha_1\beta_1}^{(n)} < \mathfrak{B}^*$ folgt, siehe K, S. 19/20.

Wir müssen nunmehr noch zeigen, daß bei der in (5. 6) und (5. 28) angegebenen Wahl von

$$\beta_{2n} = \frac{\mathsf{P}}{P_4} n^{\frac{4}{5}} \tag{5. 31}$$

die Ungleichung [5. 30] der Arbeit K erfüllt ist. Diese Ungleichung stellt die hinreichende Bedingung dafür dar, daß der außerhalb des Bizylinders $|z_1| \leqq l_{2n}$ [48]) gelegene Teil von $\mathfrak{B}^*$ ebenfalls in $\mathfrak{A}_n$ liegt [49]). [5. 30] ist aber erfüllt, da für die untere Schranke r der Beträge der z_2-Koordinaten der Randpunkte $\{z_1, z_2\}$ von $\mathfrak{k}^3_{\alpha,n}$, dessen z_1-Koordinaten zu $\mathfrak{B}^2_{2n}$ gehören, nach (5. 21)

$$r \geqq P_4 l_{2n} \geqq \frac{P_4}{n^{\frac{2}{5}}} \tag{5. 32}$$

gilt. Aus (5. 31), (5. 32) folgt

$$r|1 + \beta_{2n} z_1| \geqq r|\beta_{2n} z_1| \geqq \frac{P_4}{n^{\frac{2}{5}}} \cdot \frac{\mathsf{P}}{P_4} n^{\frac{4}{5}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{2}{5}}} = \mathsf{P}, \tag{5. 33}$$

womit auch (5. 8) vollständig bewiesen ist.

Wir gehen nunmehr zur Aufstellung der Kernfunktionen von $\mathfrak{J}_n$ und $\mathfrak{A}_n$ bzw. der Minimalfunktion von $\mathfrak{J}_n$, ferner zur Untersuchung ihres Verhaltens bei der Annäherung an Q_3 über. Unter Anwendung von [1. 15], [4. 20], (2. 13) erhalten wir

$$\frac{1}{\mathsf{K}_{\mathfrak{J}_n}(z_1, z_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)} \tag{5. 35}$$

$$= \frac{\pi^2}{2\sigma_{1n}} \frac{[z_1 + \bar{t}_1 - (2\alpha_1 + \sigma_{1n}) z_1 \bar{t}_1 - \sigma_{1n} z_2 \bar{t}_2 (1 + \beta_{1n} z_1)(1 + \beta_{1n} \bar{t}_1)(1 - \alpha_1 z_1)(1 - \alpha_1 \bar{t}_1)]^3}{(1 - \alpha_1 z_1)(1 + \beta_{1n} z_1)(1 - \alpha_1 \bar{t}_1)(1 + \beta_{1n} \bar{t}_1)}.$$

Setzt man nun [50])

$$z_k = \frac{Z_k}{n^p}, \quad t_k = \frac{T_k}{n}, \tag{5. 36}$$

so erhält man unter Berücksichtigung von (5. 5) und (5. 6)

$$\frac{1}{\mathsf{K}_{\mathfrak{J}_n}\left(\frac{Z_1}{n^p}, \frac{Z_2}{n^p}; \frac{\bar{T}_1}{n}, \frac{\bar{T}_2}{n}\right)} \tag{5. 37}$$

$$= \frac{\pi^2}{2\left(\sigma + \frac{D_1}{n^{\frac{1}{5}}}\right) n^{3p}} \left[Z_1 + \frac{\bar{T}_1}{n^{1-p}}\right]^3 \frac{\left[1 - \frac{1}{n} H_1(n, Z_1, Z_2; \bar{T}_1\ \bar{T}_2)\right]^3}{1 - \frac{1}{n^{p-\frac{4}{5}}} H_2(n, Z_1; \bar{T}_1)},$$

wo $H_1(n, Z_1, Z_2; \bar{T}_1, \bar{T}_2)$

$$= \frac{\left(2\alpha_1 + \sigma + \frac{D_1}{n^{\frac{1}{5}}}\right) Z_1 \bar{T}_1 + \left(\sigma + \frac{D_1}{n^{\frac{1}{5}}}\right) Z_2 \bar{T}_2 \left(1 + \frac{C Z_1}{n^{p-\frac{4}{5}}}\right)\left(1 - \frac{\alpha_1 Z_1}{n^p}\right)\left(1 + \frac{C_1 \bar{T}_1}{n^{\frac{1}{5}}}\right)\left(1 - \frac{\alpha_1 \bar{T}_1}{n}\right)}{Z_1 + \frac{\bar{T}_1}{n^{1-p}}},$$

$H_2(n, Z_1; \bar{T}_1)$

$$= \frac{\alpha_1 Z_1}{n^{\frac{4}{5}}} + C_1 Z_1 - \frac{\alpha_1 \bar{T}_1}{n^{\frac{4}{5}-p}} + \frac{C_1 \bar{T}_1}{n^{1-p}} - \frac{\alpha_1 C_1 Z_1^2}{n^p} + \frac{\alpha_1^2 Z_1 \bar{T}_1}{n^{\frac{4}{5}}} - \frac{\alpha_1 C_1 \bar{T}_1 Z_1}{n} - \frac{\alpha_1 C_1 Z_1 \bar{T}_1}{n}$$

---

[48]) Wegen der Bedeutung von l_{2n} vgl. S. 116.

[49]) Vgl. K, S. 21/22.

[50]) Es sei daran erinnert, daß mit Z_1, Z_2 bzw. T_1, T_2 die Koordinaten der Punkte von $\mathfrak{R}$ bezeichnet werden.

bedeutet. Da $\mathfrak{M}$ ein ganz im Endlichen gelegener Körper ist und nach (3.3) $Z_1 + \bar{Z}_1 > 2c$ ist, ist sowohl H_1 wie H_2 für jedes $n > 1$ und für alle $\{Z_1, Z_2\} < \mathfrak{M}$, $\{T_1, T_2\} < \mathfrak{M}$ gleichmäßig beschränkt. Da nach [1.10] und [1.11]

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{Z}_n}(z_1, z_2; t_1, t_2) = \frac{\mathsf{K}_{\mathfrak{Z}_n}(z_1, z_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)}{\mathsf{K}_{\mathfrak{Z}_n}(t_1, t_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)}, \quad \int_{\mathfrak{Z}_n} |\mathsf{M}_{\mathfrak{Z}_n}(z_1, z_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)|^2 \, d\omega_z = \frac{1}{\mathsf{K}_{\mathfrak{Z}_n}(t_1, t_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)}$$

gilt, gelangen wir aus (5.37) zu dem auf S. 109 formulierten Ergebnis.

Bei dem äußeren Vergleichskörper interessiert uns nur der Limesausdruck für die Kernfunktion. Nach [1.15] und (2.14) ist

$$\text{(5.39)} \quad \frac{1}{\mathsf{K}_{\mathfrak{A}_n}(t_1, t_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)} = \frac{\pi^2}{2\sigma_{2n}} \frac{[(t_1 + \bar{t}_1 - (\sigma_{2n} - 2\alpha_2)|t_1|^2)(|1 + \beta_{2n} t_1|^2) - \sigma_{2n}|t_2|^2 |1 + \alpha_2 t_1|^2]^3}{|1 + \alpha_2 t_1|^2 |1 + \beta_{2n} t_1|^4}.$$

Setzt man nun $t_k = \frac{T_k}{n}$, so erhält man schließlich unter Berücksichtigung von (5.5), (5.6) und (5.28)

$$\text{(5.40)} \quad \frac{1}{\mathsf{K}_n\left(\frac{T_1}{n}, \frac{T_2}{n}; \frac{\bar{T}_1}{n}, \frac{\bar{T}_2}{n}\right)} = \frac{\pi^2}{2\left(\sigma - \frac{D_2}{n^{\frac{1}{3}}}\right) n^3} [T_1 + \bar{T}_1]^3 \frac{\left[1 + \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} L_1(n, T_1, T_2; \bar{T}_1, \bar{T}_2)\right]^3}{1 + \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} L_2(n, T_1; \bar{T}_1)},$$

wo $L_1(n, T_1, T_2; \bar{T}_1, \bar{T}_2)$

$$= \frac{(C_2 T_1 + \overline{C_2 T_1})(T_1 + \bar{T}_1) + \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} C_2^2 |T_1|^2 (T_1 + \bar{T}_1) + \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\left(\sigma - \frac{D_2}{n^{\frac{1}{3}}} - 2\alpha_2\right)|T_1|^2 \left|1 + \frac{C_2 T_1}{n^{\frac{1}{3}}}\right|^2 - \left(\sigma - \frac{D_2}{n^{\frac{1}{3}}}\right)\frac{|T_2|^2}{n^{\frac{4}{3}}} \left|1 + \alpha_2 \frac{T_1}{n}\right.}{T_1 + \bar{T}_1}$$

$$L_2(n, T_1; \bar{T}_1) = 2C_2(T_1 + \bar{T}_1) + n^{-\frac{1}{3}} C_2^2 [(T_1 + \bar{T}_1)^2 + 2|T_1|^2] + \cdots + n^{-\frac{1}{3}} C_2^4 \alpha_2^2 |T_1|^6$$

bedeutet. Daraus folgt nun, daß

$$\text{(5.41)} \quad \frac{1}{\mathsf{K}_{\mathfrak{A}_n}\left(\frac{T_1}{n}, \frac{T_2}{n}; \frac{\bar{T}_1}{n}, \frac{\bar{T}_2}{n}\right)} = \frac{\pi^2}{2\sigma n^3} (T_1 + \bar{T}_1)^3 \left[1 + \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} L(n, T_1, T_2; \bar{T}_1, \bar{T}_2\right]$$

ist, wobei L eine für $n > 1$ und $\{T_1, T_2\} < \mathfrak{M}$ gleichmäßig beschränkte Funktion von n, T_1, T_2 bedeutet.

III. Der innere Vergleichskörper $\mathfrak{Z}_n$ ist nach (2.12), (2.13) durch

$$\text{(5.42)} \quad \frac{\boldsymbol{M}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)}{|1 - \alpha_1 z_1|^2} \equiv \frac{1}{|1 - \alpha_1 z_1|^2} [z_1 + \bar{z}_1 - (\sigma_{1n} + 2\alpha_1)|z_1|^2 - \sigma_{1n}|z_2|^2 |1 + \beta_{1n} z_1|^2 |1 - \alpha_1 z_1|^2] > 0$$

gegeben.

Sei $\{Z_1, Z_2\}$ ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{M}$ und $p > \frac{1}{3}$. Es existiert dann ein positives von $\{Z_1, Z_2\}$ unabhängiges τ so, daß für jedes $n > n_0(p)$ der Bizylinder

$$\mathfrak{C}\left(\frac{Z_1}{n^p}, \frac{Z_2}{n^p}\right): \quad \text{(5.43a)} \quad \left|\zeta_1 - \frac{Z_1}{n^p}\right| \leqq \frac{\tau}{n^p}, \quad \text{(5.43b)} \quad \left|\zeta_2 - \frac{Z_2}{n^p}\right| \leqq \frac{\tau}{n^{\frac{p}{2}}}$$

mit dem Mittelpunkt in $\left\{\frac{Z_1}{n^p}, \frac{Z_2}{n^p}\right\}$ in $\mathfrak{Z}_n$ liegt. (Vgl. dazu Abb. 1.)

Beweis. $\left(1-\alpha_1\frac{Z_1}{n^p}\right)$ wird offenbar für ein genügend großes n für jedes $\{Z_1, Z_2\} < \mathfrak{M}$ nicht verschwinden. Es genügt also zu zeigen, daß für die durch (5.43) definierten $\{\zeta_1, \zeta_2\}$ $M > 0$ gilt. Wir wählen nun positive τ und ε' so klein, daß

$$2\tau + \sigma_{1n}(\tau+\varepsilon')^2 < \frac{c}{2} \tag{5.44}$$

gilt, wobei c die in (3.5) angegebene Konstante bedeutet. Aus (5.43a) folgt nun

$$|\zeta_1| \leqq \frac{\tau + |Z_1|}{n^p} \leqq \frac{K}{n^p}, \qquad K = \tau + \frac{C}{\cos\alpha}$$

und

$$\left|\mathbf{Re}\left(\zeta_1 - \frac{Z_1}{n^p}\right)\right| \leqq \frac{\tau}{n^p}, \quad \text{d. h.} \quad \zeta_1 + \bar{\zeta}_1 \geqq \frac{Z_1 + \bar{Z}_1 - 2\tau}{n^p}. \tag{5.45}$$

[Wegen der Bedeutung von C und α vgl. (3.5) und (2.7).] Aus (5.43b) folgt für genügend großes n

$$|\zeta_2| \leqq \frac{\tau + |Z_2| n^{-\frac{p}{2}}}{n^{\frac{p}{2}}} \leqq \frac{\tau+\varepsilon'}{n^{\frac{p}{2}}}. \tag{5.46}$$

Es ist somit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}(\zeta_1, \zeta_2; \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2) &\geqq \frac{Z_1 + \bar{Z}_1 - 2\tau}{n^p} - \left(\sigma + \frac{D}{n^{\frac{1}{5}}} + 2\alpha_1\right)\frac{K^2}{n^{2p}} \\ &\quad - \sigma_{1n}\frac{(\tau+\varepsilon')^2}{n^p}\left(1 + \frac{C_1 K}{n^{p-\frac{1}{5}}}\right)^2\left(1 + \alpha_1\frac{K}{n^p}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^p}\left[Z_1 + \bar{Z}_1 - 2\tau - \sigma_{1n}(\tau+\varepsilon')^2 - \frac{1}{n^{p-\frac{1}{5}}}G(n)\right], \end{aligned} \tag{5.47}$$

wo $G(n) = \left[-\left(\sigma + \frac{D_1}{n^{\frac{1}{5}}} + 2\alpha_1\right)\frac{K^2}{n^{\frac{4}{5}}} + \sigma_{1n}(\tau+\varepsilon')^2(2S+S^2)\right] \leqq \Gamma < \infty$ und

$S = C_1 K + \frac{\alpha_1 K}{n^{\frac{4}{5}}} + \frac{C_1 K^2}{n^p}$ bedeutet. Wählt man $n > n_0 \equiv \max\left[\left(\frac{K}{\varepsilon'}\right)^{\frac{2}{p}}, \left(\frac{2\Gamma}{c}\right)^{\frac{5}{5p-4}}, (\alpha_1 K)^{\frac{1}{p}}\right]$, so folgt aus (5.47) und (3.3), daß

$$\boldsymbol{M}(\zeta_1, \zeta_2; \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2) \geqq \frac{c}{n^p} > 0 \tag{5.48}$$

ist, womit die Behauptung bewiesen ist.

IV. Bei dem Beweis des Satzes III benutzten wir den folgenden

Hilfssatz II. *Sei $n(z_1, z_2)$ eine in $\mathfrak{G}$ reguläre und quadratischintegrierbare Funktion, die im Punkte $\{t_1, t_2\} < \mathfrak{G}$ verschwindet, d. h. für die*

$$n(t_1, t_2) = 0 \tag{5.49}$$

gilt. $n(z_1, z_2)$ ist dann zu der Minimalfunktion $\mathsf{M}_{\mathfrak{G}}(z_1, z_2; t_1, t_2)$ von $\mathfrak{G}$ mit dem Aufpunkt in $\{t_1, t_2\}$ orthogonal, d. h. es gilt

$$\int_{\mathfrak{G}} n(z_1, z_2)\,\overline{\mathsf{M}_{\mathfrak{G}}(z_1, z_2; t_1, t_2)}\,d\omega_z = 0. \tag{5.50}$$

Beweis. Definitionsgemäß erteilt die Minimalfunktion dem Integral $\int_{\mathfrak{G}} |f(z_1, z_2)|^2\,d\omega$ den Minimalwert, nämlich den Wert $\frac{1}{\mathsf{K}_{\mathfrak{G}}(t_1, t_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)}$. Dabei werden alle in $\mathfrak{G}$ regulären

und quadratischintegrierbaren Funktionen $h(z_1, z_2)$ herangezogen, die der Nebenbedingung

$$h(t_1, t_2) = 1 \tag{5.51}$$

genügen. Die Funktion

$$m(z_1, z_2) = \mathsf{M}_{\mathfrak{G}}(z_1, z_2; t_1, t_2) + n(z_1, z_2) \frac{\int\limits_{\mathfrak{G}} n\, \overline{\mathsf{M}}_{\mathfrak{G}}\, d\omega}{\int\limits_{\mathfrak{G}} |n|^2\, d\omega} \tag{5.52}$$

befriedigt nach (5. 49) die Nebenbedingung (5. 51) und ist nach der Schwarzschen Ungleichung in $\mathfrak{G}$ quadratischintegrierbar. Andererseits ist

$$\int\limits_{\mathfrak{G}} |m|^2\, d\omega = \int\limits_{\mathfrak{G}} |\mathsf{M}_{\mathfrak{G}}|^2\, d\omega - \frac{\left|\int\limits_{\mathfrak{G}} n\, \overline{\mathsf{M}}_{\mathfrak{G}}\, d\omega\right|^2}{\int\limits_{\mathfrak{G}} |n|^2\, d\omega} = \frac{1}{\mathsf{K}_{\mathfrak{G}}(t_1, t_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)} - \frac{\left|\int\limits_{\mathfrak{G}} n\, \overline{\mathsf{M}}_{\mathfrak{G}}\, d\omega\right|^2}{\int\limits_{\mathfrak{G}} |n|^2\, d\omega}. \tag{5.53}$$

Wäre (5. 50) nicht erfüllt, so würde $\int\limits_{\mathfrak{G}} |m|^2\, d\omega < \frac{1}{\mathsf{K}_{\mathfrak{G}}(t_1, t_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)}$ gelten, was mit der Minimaleigenschaft der Minimalfunktion unvereinbar ist.

Nach (4. 2), (4. 6), (4. 8), dem Hilfssatz II und (4. 1) ist

$$\int\limits_{\mathfrak{Z}_n} \left| h\left(z_1, z_2; \frac{T_1}{n}, \frac{T_2}{n}\right)\right|^2 d\omega_z \tag{4.9}$$

$$= \frac{\pi^2}{2\sigma} \frac{(T_1 + \bar{T}_1)^3}{n^3} \left[\frac{C(T_1 + \bar{T}_1)^r}{n^r} - \frac{B(n, T_1, T_2; \bar{T}_1, \bar{T}_2)}{n^{\frac{1}{5}}}\right] \leqq \frac{c_1}{n^{3+\varrho}}, \quad \varrho = \min\left(r, \frac{1}{5}\right),$$

wobei $c_1 \leqq \frac{\pi^2}{\sigma} 4C^3 \left[\frac{C(2C)^r}{n^{r-\varrho}} + \frac{B}{n^{\frac{1}{5}-\varrho}}\right]$ eine von n unabhängige Konstante, B eine obere Schranke für die Funktion $B(n, T_1, T_2; \bar{T}_1, \bar{T}_2)$, $n > 1$, $\{T_1, T_2\} < \mathfrak{M}$ und C die in (3. 5) angegebene Konstante bedeuten.

§ 6.

In dem vorliegenden Paragraphen soll das Verhalten einer gewissen Familie von Funktionen in der Umgebung eines Limespunktes zweiter Ordnung Q_2 untersucht werden. Wir beginnen mit einigen einführenden Betrachtungen.

Wir verstehen wieder unter einer p-gekoppelten A^{V}-Annäherung des Punktpaares $\{z_1, z_2, t_1, t_2\}$, $z_k = x_k + iy_k$, $t_k = u_k + iv_k$, an $\{0, a_2, 0, b_2\}$ eine solche, bei der die Punkte $\{z_1, z_2\}$ und $\{t_1, t_2\}$ gegen $\{0, a_2\}$ bzw. $\{0, b_2\}$ im Sinne von A^{V} konvergieren, und außerdem zwischen den x_1- und u_1-Koordinaten die Ungleichung (3. 3) besteht. Ähnlich wie früher erweist es sich als zweckmäßig, noch eine andere Interpretation einer p-gekoppelten A^{V}-Punktfolge $\{z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}, t_1^{(\mu)}, t_2^{(\mu)}\}$ zu geben.

$\mathfrak{U}_2^2$ sei ein ganz im Innern von $\mathfrak{H}^2$ gelegener einfach zusammenhängender Teilbereich von $\mathfrak{H}^2$, der den Punkt $z_2 = 0$ enthält, und $\mathfrak{U}_1^2$ ein Teilbereich von $\mathfrak{W}_\alpha^2$, für den außer $\frac{|z_1|}{x_1} < \frac{1}{\cos\alpha}$ noch (3. 5) gilt, wobei c und C, $C > c$, beliebige Konstanten bedeuten, die nur der Forderung unterworfen sind, daß $\mathfrak{W}_{C\alpha}^2$ in $\mathfrak{J}^2$ und $\mathfrak{U}_2^2 \times \mathfrak{W}_{C\alpha}^2$ in $\mathfrak{B}$ liegt [51]). (Wegen der Bedeutung von $\mathfrak{W}_\alpha^2$, $\mathfrak{J}^2$ vgl. S. 102.) Der Produktbereich $\mathfrak{U}_1^2 \times \mathfrak{U}_2^2$ soll mit $\mathfrak{U}$, die Koordinaten seiner Punkte mit großen Buchstaben Z_1, Z_2 bzw. T_1, T_2 bezeichnet

[51]) Aus (2. 38) erschließt man leicht, daß man zu jedem abgeschlossenen $\mathfrak{U}_2^2$ ein genügend kleines C so finden kann, daß der Bereich $\mathfrak{U}_2^2 \times \mathfrak{W}_{C\alpha}^2$ in $\mathfrak{B}$ liegt.

werden. Ist nun eine Punktfolge $\{Z_1^{(\mu)}, Z_2^{(\mu)}, T_1^{(\mu)}, T_2^{(\mu)}\}$ mit $\lim_{\mu\to\infty} Z_2^{(\mu)} = a_2$, $\lim_{\mu\to\infty} T_2^{(\mu)} = b_2$ gegeben, und ist $\lim_{\mu\to\infty} n_\mu = \infty$, so ist $\left\{\frac{Z_1^{(\mu)}}{n_\mu^p}, Z_2^{(\mu)}, \frac{T_1^{(\mu)}}{n_\mu^p}, T_2^{(\mu)}\right\}$ eine p-gekoppelte A^{V}-Punktfolge, da $\frac{c^p}{C} < \frac{\left(\frac{U_1^{(\mu)}}{n_\mu}\right)^p}{\left(\frac{X_1^{(\mu)}}{n_\mu^p}\right)} < \frac{C^p}{c}$ gilt.

Ist umgekehrt eine p-gekoppelte Folge $\{z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}, t_1^{(\mu)}, t_2^{(\mu)}\}$ gegeben, so setzen wir wieder $n_\mu = \frac{d}{u_1^{(\mu)}}$, wo $d > 0$ und genügend klein ist, und erhalten ähnlich wie auf S. 108 $c = \min\left(d, \frac{d^p}{M}\right)$, $C = \max\left(d, \frac{d^p}{m}\right)$. Wählt man als $\mathfrak{U}_2^2$ einen Bereich, der die Punkte a_2 und b_2 im Innern enthält, so kann man nach (2. 38) d so klein wählen, daß $\mathfrak{W}_{C\alpha}^2 \times \mathfrak{U}_2^2$ in $\mathfrak{B}$ liegt.

Bei den Betrachtungen der Limespunkte zweiter Ordnung trat der Parameter ν auf. (Die im § 2 eingeführte Hilfsfunktion $f_\nu(z)$ hängt von ν ab.) Dieser Parameter genügt den Ungleichungen [6. 18], [6. 17], [6. 23], [6. 29], [6. 30], [6. 31], wodurch er nach unten begrenzt ist. Die in diesen Ungleichungen auftretenden Größen hängen in einer komplizierten Weise mit der Struktur der Berandung im Punkte Q_2 zusammen. Die untere Grenze der die obigen Ungleichungen befriedigenden Größen, d. h. die untere Grenze der zulässigen Werte des Parameters ν bezeichnen wir mit ν_0. Mit Rücksicht auf die weiteren Betrachtungen muß der Parameter ν außerdem die Ungleichung

$$a \cos\frac{\alpha}{\nu} - 4B \sin\frac{\alpha}{\nu} > 0 \tag{6. 1}$$

befriedigen, wobei a, B die in der Voraussetzung 1. (S. 102) auftretenden Konstanten sind und α den in (2. 40) angegebenen Öffnungswinkel von $\mathfrak{W}_\alpha^2$ bedeutet. Mit $\tau(\alpha)$ werden wir die untere Grenze der durch (6. 1) gegebenen Größen bezeichnen.

Satz IV. *Es sei jedem Punkte $\{t_1, t_2\}$ einer im Sinne von A^{V} gegen $Q_2(0, b_2)$, $b_2 < \mathfrak{H}^2$, konvergierenden Punktfolge $\mathfrak{P}^0$ eine in $\mathfrak{B}$ reguläre und quadratischintegrierbare Funktion $f(z_1, z_2; t_1, t_2)$ der beiden komplexen Veränderlichen z_1, z_2 zugeordnet. Jede Funktion dieser Schar habe die folgenden zwei Eigenschaften:*

1. *Es ist*

$$f(t_1, t_2; t_1, t_2) = 1\,, \tag{6. 2}$$

2. *die Integrale $\int_{\mathfrak{B}} |f(z_1, z_2; t_1, t_2)|^2\, d\omega_z$ genügen für $\{t_1, t_2\} < \mathfrak{P}^0$ der Ungleichung*

$$\int_{\mathfrak{B}} |f(z_1, z_2; t_1, t_2)|^2\, d\omega_z \leqq \pi^2 (t_1 + \bar{t}_1)^2 \left[\mathsf{P}^2(t_2) + C(t_1 + \bar{t}_1)^{\frac{1}{\nu^*}}\right] \text{ [52]}, \tag{6. 3}$$

wobei $C < \infty$, $\nu^* > 0$ feste von $\{t_1, t_2\}$ unabhängige Konstanten sind. Dann gilt für jedes p mit $1 - \frac{1}{2\nu} < p \leqq 1$ bei einer p-gekoppelten A^{V}-Annäherung des Punktpaares $\{z_1, z_2, t_1, t_2\}$ gleichmäßig

---

[52]) Es sei bemerkt, daß die Ungleichung (6. 3) offenbar richtig bleibt, wenn ν vergrößert wird. [Es ist $(t_1 + \bar{t}_1)^{\frac{1}{\nu}} < (t_1 + \bar{t}_1)^{\frac{1}{\nu'}}$ wenn $\nu < \nu'$ ist.]

$$\text{(6. 4)} \qquad \lim \frac{z_1^2}{(t_1+\bar{t}_1)^2} f(z_1, z_2; t_1, t_2) = \mathsf{M}_{\mathfrak{H}^2}(a_2, b_2) \qquad \textit{für } p<1,$$

$$\text{(6. 5)} \qquad \lim \frac{(z_1+\bar{t}_1)^2}{(t_1+\bar{t}_1)^2} f(z_1, z_2; t_1, t_2) = \mathsf{M}_{\mathfrak{H}^2}(a_2, b_2) \qquad \textit{für } p=1,$$

wobei $\mathsf{M}_{\mathfrak{H}^2}(z;t)$ *die Minimalfunktion von* $\mathfrak{H}^2$ *mit dem Aufpunkt in* $\{t\}$ *bedeutet und* $\nu = \max[\nu_0, \nu^*, \tau(\alpha)]$ *gesetzt ist.*

Dem Beweis unseres Satzes liegt derselbe Gedanke zu Grunde wie im Falle der Limespunkte dritter Ordnung. Da die Verhältnisse hier etwas anders liegen, sollen die Betrachtungen in allen Einzelheiten durchgeführt werden.

I. Im § 2 haben wir den inneren Vergleichskörper $\mathfrak{Z}_\nu$ eingeführt. Nach (2. 47a) hat die reziproke Kernfunktion von $\mathfrak{Z}_\nu$ den Wert

$$\text{(6. 6)} \qquad \frac{1}{\mathsf{K}_{\mathfrak{Z}_\nu}(z_1, z_2; t_1, t_2)} = \frac{\pi^2[z_1+\bar{t}_1+\varrho z_1\bar{t}_1]^2\left[1-w\left(\frac{z_2}{f_\nu(z_1)}\right)\overline{w\left(\frac{t_2}{f_\nu(t_1)}\right)}\right]^2 f_\nu(z_1)\,\overline{f_\nu(t_1)}}{w'\left(\frac{z_2}{f_\nu(z_1)}\right)\overline{w'\left(\frac{t_2}{f_\nu(t_1)}\right)}}.$$

Nach (2. 46) ist (6. 6) gleich

$$\text{(6. 7)} \qquad \frac{\pi^2(z_1+\bar{t}_1)^2\left(1+\frac{\varrho z_1\bar{t}_1}{z_1+\bar{t}_1}\right)^2\left[1-\left(w(z_2)+z_1^{\frac{1}{\nu}}K_1(z_1,z_2)\right)\left(\overline{w(t_2)}+\bar{t}_1^{\frac{1}{\nu}}K_1(t_1,t_2)\right)\right]^2\left[1+z_1^{\frac{1}{\nu}}P_1(z_1)\right]\left[1+\bar{t}_1^{\frac{1}{\nu}}P_1(t_1)\right]}{\left[w'(z_2)+z_1^{\frac{1}{\nu}}K_2(z_1,z_2)\right]\left[\overline{w'(t_2)}+\bar{t}_1^{\frac{1}{\nu}}K_2(t_1,t_2)\right]}$$

$$= \frac{\pi^2(z_1+\bar{t}_1)^2\left(1+\frac{\varrho z_1\bar{t}_1}{z_1+\bar{t}_1}\right)^2[1-w(z_2)\overline{w(t_2)}+z_1^{\frac{1}{\nu}}B_5(z_1,z_2;\bar{t}_1,\bar{t}_2)+\bar{t}_1^{\frac{1}{\nu}}B_6(z_1,z_2;\bar{t}_1,\bar{t}_2)]^2[1-z_1^{\frac{1}{\nu}}B_7(z_1,\bar{t}_1)-\bar{t}_1^{\frac{1}{\nu}}B_8(z_1,\bar{t}_1)]}{w'(z_2)\overline{w'(t_2)}\left[1+z_1^{\frac{1}{\nu}}\frac{K_2(z_1,z_2)}{w'(z_2)}\right]\left[1+\bar{t}_1^{\frac{1}{\nu}}\frac{K_2(\bar{t}_1,\bar{t}_2)}{\overline{w'(t_2)}}\right]}$$

$$= \frac{\pi^2(z_1+\bar{t}_1)^2[1-w(z_2)\overline{w(t_2)}]^2}{w'(z_2)\,\overline{w'(t_2)}}\left[1+z_1^{\frac{1}{\nu}}B_9(z_1,z_2;\bar{t}_1,\bar{t}_2)+\bar{t}_1^{\frac{1}{\nu}}B_{10}(z_1,z_2;\bar{t}_1,\bar{t}_2)\right].$$

Da $|w(z_2)| \leqq q_1 < 1$, $w'(z_2) \geqq q_2 > 0$ ist und $\left|\frac{z_1}{z_1+\bar{t}_1}\right|$ für $z_1, t_1 < \mathfrak{W}^2_{C\alpha}$ beschränkt bleibt, sind die Funktionen $B_k(z_1, z_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)$ für $\{z_1, z_2\}$ und $\{t_1, t_2\}$ aus $\mathfrak{W}^2_{C\alpha} \times \mathfrak{U}^2_2$ nach (2. 47) und (2. 44) gleichmäßig beschränkt.

Für $\frac{1}{\mathsf{K}_{\mathfrak{Z}_\nu}(t_1, t_2; \bar{t}_1, \bar{t}_2)}$ benötigen wir eine schärfere Abschätzung. Unter Benutzung der auf S. 104 eingeführten Abkürzungen $w^{(k)}(X) \equiv \frac{d^k w(X)}{dX}$ schreiben wir unter Anwendung des ersten Mittelwertsatzes

$$\text{(6. 8)} \qquad w^{(k)}\left(\frac{t_2}{f_\nu(t_1)}\right) = w^{(k)}(t_2) + t_1^{\frac{1}{\nu}} w^{(k+1)}(t_2)\, A_\nu t_2 + t_1^{\frac{2}{\nu}} K_{2+k}(t_1, t_2),$$

wo

$$\text{(6. 9)} \quad K_{k+2}(t_1, t_2) = \tfrac{1}{2} w^{(k+2)}\left(\frac{t_2}{f_\nu(t_1)}\right)\frac{t_2^2[f_\nu^{(1)}(\vartheta t_1)]^2}{[f_\nu(\vartheta t_1)]^4} + 2\, w^{(k+1)}\left(\frac{t_2}{f_\nu(\vartheta t_1)}\right)\frac{t_2[f_\nu^{(1)}(\vartheta t_1)]^2}{[f_\nu(\vartheta t_1)]^3} - w^{(k+1)}\left(\frac{t_2}{f_\nu(\vartheta t_1)}\right)\frac{t_2 f_\nu^{(2)}(\vartheta t_1)}{[f_\nu(\vartheta t_1)]^2},$$

$$0 < \vartheta < 1, \quad f_\nu^{(\varkappa)} = \frac{d^\varkappa f_\nu}{d\left(\frac{1}{t_1^\nu}\right)^\varkappa}, \qquad \varkappa = 1, 2$$

bedeutet. Es ist somit

$$(10)\qquad \frac{1}{\mathsf{K}_{\mathfrak{Z}_\nu}(t_1,t_2;\bar t_1,\bar t_2)}$$

$$=\frac{\pi^2(t_1+\bar t_1)^2\left(1+\frac{\sigma|t_1|^2}{t_1+\bar t_1}\right)^2[1-|w(t_2)+t_1^{\frac{1}{\nu}}w^{(1)}(t_2)A_\nu t_2+t_1^{\frac{2}{\nu}}K_3(t_1,t_2)|^2]^2\,|1-A_\nu t_1^{\frac{1}{\nu}}+t_1^{\frac{2}{\nu}}G_4(t_1)|^2}{|w^{(1)}(t_2)+t_1^{\frac{1}{\nu}}A_2t_2w^{(2)}(t_2)+t_1^{\frac{2}{\nu}}K_4(t_1,t_2)|^2}$$

$$=\frac{\pi^2(t_1+\bar t_1)^2\left[1-|w(t_2)|^2-2\,\mathbf{Re}\left[t_1^{\frac{1}{\nu}}A_\nu t_2w^{(1)}(t_2)\,\overline{w(t_2)}\right]+t_1^{\frac{2}{\nu}}B_{11}(t_1,t_2)+\overline{t_1^{\frac{2}{\nu}}B_{12}(t_1,t_2)}\right]^2\left(1+\frac{\varrho|t_1|^2}{t_1+\bar t_1}\right)^2\left[1-2\,\mathbf{Re}\left(A_\nu t_1^{\frac{1}{\nu}}\right)+t_1^{\frac{2}{\nu}}G_5(t_1)+\overline{t_1^{\frac{2}{\nu}}G_6(t_1)}+|t_1|^{\frac{2}{\nu}}|A_\nu|^2\right]}{|w^{(1)}(t_2)|^2\left[1+2\,\mathbf{Re}\,\frac{t_1^{\frac{1}{\nu}}A_\nu t_2w^{(2)}(t_2)}{w^{(1)}(t_2)}+t_1^{\frac{2}{\nu}}B_{13}(t_1,t_2)+\overline{t_1^{\frac{2}{\nu}}B_{14}(t_1,t_2)}+|t_1|^{\frac{2}{\nu}}|t_2w^{(2)}(t_2)|^2\right]}$$

$$=\frac{\pi^2(t_1+\bar t_1)^2(1-|w(t_2)|^2)^2}{|w^{(1)}(t_2)|^2}\left[1+\frac{\varrho|t_1|^2}{t_1+\bar t_1}\right]^2\left[1-2A_\nu\,\mathbf{Re}\left[t_1^{\frac{1}{\nu}}\left(\frac{2t_2w^{(1)}(t_2)\overline{w(t_2)}}{1-|w(t_2)|^2}+1+\frac{t_2w^{(2)}(t_2)}{w^{(1)}(t_2)}\right)\right]+t_1^{\frac{1}{\nu}}B_{15}(t_1,t_2)+\bar t_1^{\frac{2}{\nu}}B_{16}(t_1,t_2)+|t_1|^{\frac{2}{\nu}}B_{17}(t_1,t_2)\right]$$

$$=\pi^2(t_1+\bar t_1)^2\left[\mathsf{P}^2(t_2)-2\,\mathbf{Re}\left[A_\nu t_1^{\frac{1}{\nu}}\left(\mathsf{P}^2(t_2)-t_2\frac{d\mathsf{P}^2(t_2)}{dt_2}\right)\right]+t_1^{\frac{2}{\nu}}B_{15}(t_1,t_2)+\bar t_1^{\frac{2}{\nu}}B_{16}(t_1,t_2)+|t_1|^{\frac{2}{\nu}}B_{17}(t_1,t_2)\right]\left[1+\frac{\varrho|t_1|^2}{t_1+\bar t_1}\right]^2,$$

wobei $B_k\,(z_1,z_2;t_1,t_2)$ für $\{t_1,t_2\}<\mathfrak{U}$ gleichmäßig beschränkte Funktionen sind.

Setzt man nun $t_1=\frac{T_1}{n}$, $t_2=T_2$, $z_1=\frac{Z_1}{n^p}$, $z_2=Z_2$, so gelangen wir zu dem folgenden Ergebnis:

Für die Minimalfunktion bzw. die reziproke Kernfunktion des inneren Vergleichskörpers $\mathfrak{Z}_\nu$ gilt:

$$(6.\,11)\qquad \mathsf{M}_{\mathfrak{Z}_\nu}\left(\frac{Z_1}{n^p},Z_2;\frac{T_1}{n},T_2\right)$$

$$=\frac{w^{(1)}(Z_2)(T_1+\bar T_1)^2[1-|w(T_2)|^2]^2\left[1+\frac{1}{n^{\frac{1}{\nu}}}B_{17}(n,T_1,T_2;\bar T_1,\bar T_2)\right]}{\left(Z_1+\frac{\bar T_1}{n^{1-p}}\right)^2[1-w(Z_2)\,\overline{w(T_2)}]^2\,w^{(1)}(T_2)\left[1+\frac{1}{n^{\frac{p}{\nu}}}B_{18}(n,Z_1,Z_2;\bar T_1,\bar T_2)\right]},$$

$$(6.\,12)\qquad \frac{1}{\mathsf{K}_{\mathfrak{Z}_\nu}\left(\frac{T_1}{n},T_2;\frac{\bar T_1}{n},\bar T_2\right)}$$

$$=\frac{\pi^2(T_1+\bar T_1)^2}{n^2}\left[\mathsf{P}^2(T_2)-\frac{2A_\nu}{n^{\frac{1}{\nu}}}\,\mathbf{Re}\left[T_1^{\frac{1}{\nu}}\left(\mathsf{P}^2(T_2)-T_2\frac{d\mathsf{P}^2(T_2)}{dT_2}\right)\right]+\frac{1}{n^{\frac{2}{\nu}}}B_{19}(n,T_1,T_2;\bar T_1,\bar T_2)\right],$$

wobei $B_{18}(n,Z_1,Z_2;T_1,T_2)$ und $B_k(n,T_1,T_2;\bar T_1,\bar T_2)$, $k=17,19$, für $\{Z_1,Z_2\}$ und $\{T_1,T_2\}$ aus $\mathfrak{U}$ und $n>1$ gleichmäßig beschränkte Funktionen aller Veränderlichen sind und $\mathsf{P}(T_2)$ den Abbildungsradius von $\mathfrak{H}^2$ im Punkte T_2 bedeutet.

Bei dem Korollar, in welchem die Limesformeln für $\mathsf{M}_{\mathfrak{B}}$ gewonnen werden, benötigen wir eine Abschätzung für die Kernfunktion des im § 2 eingeführten äußeren Vergleichskörpers. Nach (2. 47a) ist

$$(6.\,13)\qquad \frac{1}{\mathsf{K}_{\mathfrak{A}_\nu}(t_1,t_2;\bar t_1,\bar t_2)}=\frac{\pi^2(t_1+\bar t_1)^2[1-|w(t_2f_\nu(t_1))|^2]^2}{|w^{(1)}(t_2f_\nu(t_1))|^2\,|f_\nu(t_1)|^2}.$$

Nach dem ersten Mittelwertsatz ist wieder

$$w^{(k)}(t_2 f_\nu(t_1)) = w^{(k)}(t_2) - t_1^{\frac{1}{\nu}} A_\nu t_2 w^{(k+1)}(t_2) + t_1^{\frac{2}{\nu}} K_5(t_1, t_2), \tag{6.14}$$

wo

$$K_5(t_1, t_2) = w^{(k+2)}\left(t_2 f_\nu(\vartheta t_1)\right) t_2^2 \left(f_\nu^{(1)}(\vartheta t_1)\right)^2 + w^{(k+1)}\left(t_2 f_\nu(\vartheta t_1)\right) t_2 f_\nu^{(2)}(\vartheta t_1), \tag{6.15}$$

$$0 < \vartheta < 1, \quad f_\nu^{(\varkappa)} = \frac{d f_\nu(t_1)}{d\left(\frac{1}{t_1^\nu}\right)^\varkappa},$$

eine für $\{t_1, t_2\} < \mathfrak{U}$ gleichmäßig beschränkte Funktion bedeutet. Man erhält somit für (6.13)

$$\frac{\pi^2(t_1+\bar{t}_1)^2\left[1-|w(t_2)|^2+2\,\mathbf{Re}\left(t_1^{\frac{1}{\nu}} A_\nu t_2 w^{(1)}(t_2)\overline{w(t_2)}\right)+t_1^{\frac{2}{\nu}} B_{20}+\bar{t}_1^{\frac{2}{\nu}} B_{21}\right]^2}{|w^{(1)}(t_2)|^2\,|1-t_1^{\frac{1}{\nu}}\frac{A_\nu t_2 w^{(2)}(t_2)}{w^{(1)}(t_2)}+t_1^{\frac{2}{\nu}} B_{22}|^2\,|1-A_\nu t_1^{\frac{1}{\nu}}+t_1^{\frac{2}{\nu}} B_{23}|^2} \tag{6.16}$$

$$= \frac{\pi^2(t_1+\bar{t}_1)^2(1-|w(t_2)|^2)^2}{|w^{(1)}(t_2)|^2}\left[1+2\,\mathbf{Re}\left[t_1^{\frac{1}{\nu}} A_\nu\left(\frac{2 t_2 w^{(1)}(t_2)\overline{w(t_2)}}{1-|w(t_2)|^2}+\frac{t_2 w^{(2)}(t_2)}{w^{(1)}(t_2)}+1\right)+t_1^{\frac{2}{\nu}} B_{24}+\bar{t}_1^{\frac{2}{\nu}} B_{25}+|t_1|^{\frac{2}{\nu}} B_{26}\right]\right]$$

$$= \pi^2(t_1+\bar{t}_1)^2\left[\mathsf{P}^2(t_2)+2\,\mathbf{Re}\left[A_\nu t_1^{\frac{1}{\nu}}\left(\mathsf{P}^2(t_2)-t_2\frac{d\mathsf{P}^2(t_2)}{dt_2}\right)\right]+\mathbf{Re}\left[t_1^{\frac{2}{\nu}} B_{26}\right]\right],$$

wobei für $\{t_1, t_2\} < \mathfrak{W}^2_{C\alpha} \times \mathfrak{U}_2^2$ die B_k gleichmäßig beschränkte Funktionen sind.

Setzt man nun wieder $t_1 = \frac{T_1}{n}$, $t_2 = T_2$, so gelangen wir zu dem Ergebnis:

Für die reziproke Kernfunktion des äußeren Vergleichskörpers $\mathfrak{A}_\nu$ *gilt*

$$\frac{1}{\mathsf{K}_{\mathfrak{A}_\nu}\left(\frac{T_1}{n}, T_2; \frac{\bar{T}_1}{n}, \bar{T}_2\right)} \tag{6.17}$$

$$= \frac{\pi^2(T_1+\bar{T}_1)^2}{n^2}\left[\mathsf{P}^2(T_2)+\frac{1}{n^{\frac{1}{\nu}}}\mathbf{Re}\left[A_\nu T_1^{\frac{1}{\nu}}\left(\mathsf{P}^2(T_2)+T_2\frac{d\mathsf{P}^2(T_2)}{dT_2}\right)\right]+\frac{1}{n^{2\nu}} B_{27}(n, T_1, T_2; \bar{T}_1, \bar{T}_2)\right],$$

wo $B_{27}(n, T_1, T_2; \bar{T}_1, \bar{T}_2)$ *für* $n > 1$ *und* $\{T_1, T_2\} < \mathfrak{U}$ *eine gleichmäßig beschränkte Funktion ist.*

II. *Sei* $\{Z_1, Z_2\}$ *ein beliebiger Punkt von* $\mathfrak{U}$ *und* $p > 0$. *Es existiert dann ein von* $\{Z_1, Z_2\}$ *und* n *unabhängiges* τ *so, daß für jedes* $n > n_0$ *der Bizylinder*

$$\mathfrak{E}\left(\frac{Z_1}{n^p}, Z_2\right): \qquad \left|\zeta_1 - \frac{Z_1}{n^p}\right| < \frac{\tau}{n^p}, \quad |\zeta_2 - Z_2| < \tau \tag{6.18}$$

mit dem Mittelpunkt in $\left\{\frac{Z_1}{n^p}, Z_2\right\}$ *in* $\mathfrak{J}_\nu$ *liegt.*

Beweis. $\mathfrak{J}_\nu \cdot (z_1 = \gamma)$ ist ein Sternbereich, dessen Berandung durch die Gleichung

$$R = h^*(\gamma, \theta) \equiv h[\theta - \vartheta_\nu(\gamma)]\,|f_\nu(\gamma)|, \quad \gamma = re^{i\varphi}, \ \vartheta_\nu(\gamma) = \arg f_\nu(\gamma) \quad [6.46\text{a}] \tag{6.19}$$

gegeben ist. Wir wollen nun zeigen, daß *ein von* θ *und* φ *unabhängiges* $r_0 = r_0(\alpha, \nu)$ *so existiert, daß für* $r < min\left(r_0, \frac{2}{\varrho}\cos\alpha\right)$

$$\frac{dh^*(\gamma, \theta)}{dr} < 0, \qquad \gamma = re^{i\varphi}, \quad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \tag{6.20}$$

gilt.

Es ist

$$\frac{dh^*(\gamma, \theta)}{dr} = h[\theta - \vartheta_\nu(\gamma)]\frac{d|f_\nu(\gamma)|}{dr} - h'[\theta - \vartheta_\nu(\gamma)]\frac{d\vartheta_\nu(\gamma)}{dr}|f_\nu(\gamma)|. \tag{6.21}$$

Wir werden nun für $\frac{d|f_\nu(\gamma)|}{dr}$ und $\frac{d\vartheta_\nu(\gamma)}{dr}$ einige Abschätzungen gewinnen, wobei wir zunächst annehmen, daß $r \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu}$ ist.

Nach den auf den S. 619 und 620 der Arbeit A [33]) abgeleiteten Formeln und nach (2. 44) ist

$$f_\nu(z) = 1 - A_\nu z^{\frac{1}{\nu}} - G_4(z), \tag{6. 22}$$

wo

$$G_4(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\nu}\right)} z^{\frac{1}{\nu}}\left[\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\nu}}{\varkappa}\frac{(zi)^\varkappa}{\varkappa+\frac{1}{\nu}}\right] \tag{6. 23}$$

ist. Da nun

$$\frac{A_\nu}{\nu} \equiv \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\nu}\right)} = \frac{1}{\nu} + O\left(\frac{1}{\nu^2}\right), \qquad \left|\binom{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\nu}}{\varkappa}\frac{(zi)^\varkappa}{\varkappa+\frac{1}{\nu}}\right| \leqq \frac{|z|^\varkappa}{\varkappa}$$

ist, gibt es *von ν unabhängige* Konstanten L, M ($L < 1+\varepsilon_\nu$, $M < 1+\varepsilon_\nu$, mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu = 0$) so, daß

$$|G_4(re^{i\varphi})| \leqq \frac{L}{\nu} r^{1+\frac{1}{\nu}}, \qquad \left|\frac{dG_4(re^{i\varphi})}{dr}\right| \leqq \frac{M}{\nu} r^{\frac{1}{\nu}} \tag{6. 24}$$

gilt, woraus auch $\left|\frac{d|G_4(re^{i\varphi})|}{dr}\right| \leqq \frac{M}{\nu} r^{\frac{1}{\nu}}$ folgt. Andererseits ist

$$1 - A_\nu r^{\frac{1}{\nu}} \cos\frac{\varphi}{\nu} - |G_4| \leqq |f_\nu(re^{i\varphi})| \leqq 1 - A_\nu r^{\frac{1}{\nu}}\left(\cos\frac{\varphi}{\nu} - \left|\sin\frac{\varphi}{\nu}\right|\right) + \mathbf{Im}\, G_4 + \mathbf{Re}\, G_4. \tag{6. 25}$$

Aus (6. 24) und (6. 25) erschließt man, daß $|f_\nu(re^{i\varphi})| > \frac{1}{2}$ gilt, und ferner, daß

$$\mathbf{Re}\, f_\nu(re^{i\varphi}) = 1 - A_\nu r^{\frac{1}{\nu}} \cos\frac{\varphi}{\nu} + \mathbf{Re}\, G_4, \quad \mathbf{Im}\, f_\nu(re^{i\varphi}) = -A_\nu r^{\frac{1}{\nu}} \sin\frac{\varphi}{\nu} + \mathbf{Im}\, G_4, \tag{6. 26}$$

$$|f_\nu|^2 = 1 - 2r^{\frac{1}{\nu}} A_\nu \cos\frac{\varphi}{\nu} + A_\nu^2 r^{\frac{2}{\nu}} + 2\,\mathbf{Re}\, G_4 + |G_4|^2 + 2r^{\frac{1}{\nu}}|G_4| \cos\left(\frac{\varphi}{\nu} - \arc G_4\right) \tag{6. 27}$$

ist, woraus

$$2|f_\nu|\frac{d|f_\nu|}{dr} = -\frac{2A_\nu \cos\frac{\varphi}{\nu}}{\nu r^{1-\frac{1}{\nu}}} + K_1(\nu, r) \tag{6. 28}$$

folgt, wo

$$K_1(\nu,r) = \frac{2}{\nu}\frac{A_\nu^2}{r^{1-\frac{2}{\nu}}} + 2\frac{d\,\mathbf{Re}\, G_4}{dr} + 2|G_4|\frac{d|G_4|}{dr} + \frac{2A_\nu|G_4|}{\nu r^{1-\frac{1}{\nu}}}\cos\left(\frac{\varphi}{\nu} - \arc G_4\right)$$
$$+ 2A_\nu r^{\frac{1}{\nu}}\frac{d|G_4|}{dr}\cos\left(\frac{\varphi}{\nu} - \arc G_4\right) - 2A_\nu r^{\frac{1}{\nu}}\sin\left(\frac{\varphi}{\nu} - \arc G_4\right)|G_4|\frac{d\arc G_4}{dr}$$ [53]

bedeutet. Aus (6. 24) folgt, daß

---

[53]) Es ist

$$|G_4|\frac{d\arc G_4}{dr} \leqq |G_4|\left|\frac{d\log G_4}{dr}\right| \leqq \left|\frac{dG_4}{dr}\right|.$$

$$(6.29)\quad |K_1(\nu,r)| \leqq \frac{2A_\nu^2}{\nu r^{1-\frac{2}{\nu}}} + \frac{2Mr^{\frac{1}{\nu}}}{\nu} + \frac{2LMr^{1+\frac{2}{\nu}}}{\nu^2} + \frac{2A_\nu Lr^{\frac{2}{\nu}}}{\nu^2} + \frac{4A_\nu Mr^{\frac{2}{\nu}}}{\nu}$$

$$= \frac{1}{\nu r^{1-\frac{2}{\nu}}}\left[2A_\nu^2 + 2Mr^{1-\frac{1}{\nu}} + \frac{2LMr^2}{\nu} + \frac{2A_\nu Lr}{\nu} + 4A_\nu Mr\right]$$

$$= \frac{1}{\nu r^{1-\frac{2}{\nu}}} B^*(r)$$

ist, wobei $B^*(r)$ für $r \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu}$ eine gleichmäßig beschränkte Funktion ist. Somit ist

$$(6.30)\qquad 2|f_\nu|\frac{d|f_\nu|}{dr} = -\frac{2A_\nu \cos\frac{\varphi}{\nu}}{\nu r^{1-\frac{1}{\nu}}}\left[1 + r^{\frac{1}{\nu}} K(r,\nu)\right],$$

wobei $K(r,\nu) = \nu r^{1-\frac{2}{\nu}} K_1(r,\nu)$ ist und für $\nu > 1$, $r < \left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu}$ gilt: $|K(r,\nu)| \leqq B^*(r)$.

Für $\left|\frac{d\vartheta_\nu(re^{i\varphi})}{dr}\right|$ erhält man unter Benutzung von (6.24) und (6.25):

$$(6.31)\quad \left|\frac{d\vartheta_\nu(re^{i\varphi})}{dr}\right| = \left|\frac{d \operatorname{arc\,tang}\frac{\operatorname{Im} f_\nu}{\operatorname{Re} f_\nu}}{dr}\right| \leqq \frac{\left|\operatorname{Re} f_\nu \frac{d \operatorname{Im} f_\nu}{dr}\right| + \left|\operatorname{Im} f_\nu \frac{d \operatorname{Re} f_\nu}{dr}\right|}{[\operatorname{Re} f_\nu]^2} \leqq 4\left[\left|\operatorname{Re} f_\nu \frac{d \operatorname{Im} f_\nu}{dr}\right| + \left|\operatorname{Im} f_\nu \frac{d \operatorname{Re} f_\nu}{dr}\right|\right]$$

$$\leqq 4\left[\left(1 + A_\nu r^{\frac{1}{\nu}} + \frac{L}{\nu} r^{1+\frac{1}{\nu}}\right)\left(\frac{A_\nu}{\nu}\frac{\sin\frac{\alpha}{\nu}}{r^{1-\frac{1}{\nu}}} + \frac{M}{\nu} r^{\frac{1}{\nu}}\right) + \left(A_\nu r^{\frac{1}{\nu}} \sin\frac{\alpha}{\nu} + \frac{L}{\nu} r^{1+\frac{1}{\nu}}\right)\left(\frac{A_\nu}{\nu}\frac{1}{r^{1-\frac{1}{\nu}}} + \frac{M}{\nu} r^{\frac{1}{\nu}}\right)\right]$$

$$\leqq \frac{4}{\nu}\left[\frac{A_\nu \sin\frac{\alpha}{\nu}}{r^{1-\frac{1}{\nu}}} + \frac{2A_\nu^2 r^{\frac{1}{\nu}} \sin\frac{\alpha}{\nu}}{r^{1-\frac{1}{\nu}}} + \frac{LA_\nu r^{1+\frac{1}{\nu}} \sin\frac{\alpha}{\nu}}{r^{1-\frac{1}{\nu}}} + \frac{LA_\nu r^{1+\frac{1}{\nu}}}{\nu r^{1-\frac{1}{\nu}}}\right.$$

$$\left. + Mr^{\frac{1}{\nu}}\left(1 + A_\nu r^{\frac{1}{\nu}} + 2\frac{L}{\nu} r^{1+\frac{1}{\nu}} + A_\nu r^{\frac{1}{\nu}} \sin\frac{\alpha}{\nu}\right)\right]$$

$$= \frac{4A_\nu \sin\frac{\alpha}{\nu}}{\nu r^{1-\frac{1}{\nu}}}\left[\left(1 + 2A_\nu r^{\frac{1}{\nu}} + \frac{L}{\nu} r^{1+\frac{1}{\nu}} + \frac{Lr^{1+\frac{1}{\nu}}}{\nu \sin\frac{\alpha}{\nu}}\right) + \frac{Mr}{A_\nu \sin\frac{\alpha}{\nu}}\left(1 + A_\nu r^{\frac{1}{\nu}} + 2\frac{L}{\nu} r^{1+\frac{1}{\nu}} + A_\nu r^{\frac{1}{\nu}} \sin\frac{\alpha}{\nu}\right)\right].$$

Da $\alpha > \frac{\pi}{4}$ angenommen werden darf, ist $\nu \sin\frac{\alpha}{\nu} > \frac{1}{2}$; da ferner $\frac{\sqrt{r}}{\sin\frac{\alpha}{\nu}} \leqq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^\nu}{\sin\frac{\alpha}{\nu}}$ für $\nu > 1$ gleichmäßig beschränkt ist, so gelangen wir zu dem Ergebnis, daß

$$(6.32)\qquad \left|\frac{d\vartheta_\nu(re^{i\varphi})}{dr}\right| \leqq \frac{4A_\nu \sin\frac{\alpha}{\nu}}{\nu r^{1-\frac{1}{\nu}}}\left[1 + r^{\frac{1}{\nu}} B^{**}(r)\right]$$

gilt, wobei $B^{**}(r)$ für $r \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu}$ eine gleichmäßig beschränkte Funktion ist.

Aus (6.30) folgt, daß $\frac{d|f_\nu|}{dr} < 0$ ist für genügend kleines r, und da $\frac{1}{2} \leqq |f_\nu| \leqq 1$ ist, folgt aus (6.21), (6.30) und (6.32)

$$(6.33)\quad \frac{dh^*(\gamma,\theta)}{dr} \leqq -\frac{A_\nu a\cos\frac{\alpha}{\nu}}{\nu r^{1-\frac{1}{\nu}}}\left[1+r^{\frac{1}{\nu}}B^*(r)\right]+\frac{4BA_\nu\sin\frac{\alpha}{\nu}}{\nu r^{1-\frac{1}{\nu}}}\left[1+r^{\frac{1}{\nu}}B^{**}(r)\right]$$

$$\leqq -\frac{A_\nu}{\nu r^{1-\frac{1}{\nu}}}\left[\left(a\cos\frac{\alpha}{\nu}-4B\sin\frac{\alpha}{\nu}\right)+r^{\frac{1}{\nu}}B^{\dagger}(r)\right],$$

wobei $B^{\dagger}(r)$ eine für genügend kleines r gleichmäßig beschränkte Funktion bedeutet. (Wegen a und B siehe S. 102.) Aus (6. 1) und (6. 33) schließt man weiter, daß ein positives $r_0^*=r_0^*(\alpha,\nu)=\min\left[r_0(\alpha,\nu),\left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu},\frac{2}{\varrho}\cos\alpha\right]$ so existiert, daß für jedes $r<r_0^*$ und jedes φ, $|\varphi|<\alpha$, die Ungleichung (6. 20) erfüllt ist.

Wir gehen nun zum Beweis der unter II formulierten Behauptung über. Die Randkurve von $\mathfrak{Z}_\nu\cdot(z_1=\gamma)$ ist durch (6. 19) gegeben, wobei für jedes φ, $|\varphi|<\alpha$,

$$(6.34)\qquad \lim_{\nu\to\infty}|f_\nu(re^{i\varphi})|=1,\quad \lim_{\nu\to\infty}\vartheta_\nu(re^{i\varphi})=0$$

gilt. (Vgl. dazu auch die Formeln [6. 14] und (14) der Arbeit A.) Da die Punktmenge $Z_2^{(m)}$, $m\to\infty$, gegen einen inneren Punkt von $\mathfrak{H}^2$ konvergiert, existiert ein $\tau_2>0$ so, daß für jedes genügend große m der Kreis $|\zeta_2-Z_2^{(m)}|\leqq 2\tau_2$ in $\mathfrak{H}^2$ liegt. Andererseits kann man nach (6. 34) ein positives $2l\leqq r_0^*\left[\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right),\nu\right]$ so bestimmen, daß für jedes $Z_2^{(m)}$ und φ, $|\varphi|<\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}$, der Kreis $|\zeta_1-Z_2^{(m)}|\leqq\tau_2$ in $\mathfrak{Z}_\nu\cdot(z_1=2le^{i\varphi})$ liegt. Ferner existiert ein $\tau_1>0$ so, daß man um jeden Punkt $\frac{l}{n^p}$ des Winkelgebietes $\mathfrak{W}_{l\alpha}^2$: $r<l$, $|\varphi|<\alpha$, den Kreis $\left|\zeta_1-\frac{l}{n^p}\right|\leqq\frac{\tau_1}{n^p}$ legen kann, der ganz in dem Winkelgebiete $\mathfrak{W}^2_{2l,\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}}$: $r<2l$, $|\varphi|<\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}$ liegt. Da

$$\frac{dh^*(re^{i\varphi},\theta)}{dr}<0 \text{ ist für } r<2l,\ |\varphi|\leqq\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4},$$

gilt für $r_1<r_2<2l$: $\mathfrak{Z}_\nu\cdot(z_1=r_1e^{i\varphi})<\mathfrak{Z}_\nu\cdot(z_1=r_2e^{i\varphi})$. Demnach wird für $\gamma<\mathfrak{W}^2_{2l,\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}}$ und für jedes m der Kreis $|\zeta_2-Z_2^{(m)}|\leqq\tau_2$ in $\mathfrak{Z}_\nu\cdot(z_1=\gamma)$ liegen.

Jeder Bizylinder (6. 18) *mit* $\tau=\min(\tau_1,\tau_2)$ *wird somit in* $\mathfrak{Z}_\nu$ *liegen.*

III. Wir gehen nunmehr zum eigentlichen Beweis des Satzes IV über und setzen

$$(6.34)\qquad h(z_1,z_2;t_1,t_2)=f(z_1,z_2;t_1,t_2)-\mathsf{M}_{\mathfrak{Z}_\nu}(z_1,z_2;t_1,t_2).$$

Nach dem Hilfssatz II folgt aus (6. 3), [1. 11] und (6. 12), daß

$$(6.35)\quad \int_{\mathfrak{Z}_\nu}\left|h\left(z_1,z_2;\frac{T_1}{n},T_2\right)\right|^2 d\omega_z\leqq\frac{c_1}{n^{2+\frac{1}{\nu}}},$$

$$c_1=\pi^2(T_1+\bar{T}_1)^{2+\frac{1}{\nu}}\left\{C+2\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{T_1}{T_1+\bar{T}_1}\right)^{\frac{1}{\nu}}\left(\mathsf{P}^2(T_2)+T_2\frac{d\mathsf{P}^2(T_2)}{dT_2}\right)\right]\right\}$$

gilt. Ist nun $\{Z_1, Z_2\} < \mathfrak{U}$, so ist für ein genügend großes n $\left\{\frac{Z_1}{n^p}, Z_2\right\} < \mathfrak{F}_\nu$ und, da f in dem Bizylinder $\mathfrak{E}\left(\frac{Z_1}{n^p}, Z_2\right)$ regulär ist, gilt nach (4. 10)

$$(6.\,36)\qquad \left|h\left(\frac{Z_1}{n^p}, Z_2; \frac{\overline{T}_1}{n}, \overline{T}_2\right)\right|$$

$$\leqq \sqrt{\frac{\int |h|^2\, d\omega}{\mathfrak{E}\left(\frac{Z_1}{n^p}, Z_1\right)}} \Big/ \mathrm{Vol.}\left[\mathfrak{E}\left(\frac{Z_1}{n^p}, Z_2\right)\right] \leqq \sqrt{\frac{\int |h|^2\, d\omega}{\mathfrak{F}_\nu}} \Big/ \mathrm{Vol.}\left[\mathfrak{E}\left(\frac{Z_1}{n^p}, Z_2\right)\right] \leqq \sqrt{\frac{1}{n^{2-2p+\frac{1}{\nu}}} \frac{c_1}{\pi^2 \tau^3}} = \frac{c_2}{n^{1-p-\frac{1}{2\nu}}}\,^{54}),$$

d. h. für jedes $\{Z_1, Z_2\} < \mathfrak{U}$ gilt

$$(6.\,37)\qquad n^{2-2p}\left|h\left(\frac{Z_1}{n^p}, Z_2; \frac{T_1}{n}, T_2\right)\right| \leqq \frac{c_2}{n^{p-1+\frac{1}{2\nu}}}.$$

Aus (6. 34), (6. 11) und (6. 37) folgt nun

$$(6.\,38)\qquad \mathsf{M}_{\mathfrak{F}_\nu}\left(\frac{Z_1}{n^p}, Z_2; \frac{T_1}{n}, T_2\right)$$

$$= \frac{w^{(1)}(Z_2)\left(\frac{T_1}{n} + \frac{\overline{T}_1}{n}\right)^2 [1 - |w(T_2)|^2]^2}{\left(\frac{Z_1}{n^p} + \frac{\overline{T}_1}{n}\right)^2 [1 - w(Z_2)\,\overline{w(T_2)}]}\left(-1 + \frac{B}{n^{\frac{1}{\nu}}}\right) = \frac{(T_1 + \overline{T}_1)^2\, n^{2-2p}}{\left(Z_1 + \frac{T_1}{n^{1-p}}\right)} \mathsf{M}_{\mathfrak{H}^1}(Z_2, T_2)\left[1 + \frac{B}{n^{\frac{1}{\nu}}}\right],$$

woraus (6. 4) bzw. (6. 5) folgt. Damit ist der Beweis des Satzes IV erbracht.

Die Minimalfunktion $\mathsf{M}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; t_1, t_2)$ von $\mathfrak{B}$ erfüllt definitionsgemäß (6. 2) und nach [1. 11], [1. 12] und (6. 17) die Ungleichung (6. 3). Es gilt somit das

Korollar. *Für die Minimalfunktion* $\mathsf{M}_{\mathfrak{B}}(z_1, z_2; t_1, t_2)$ *von* $\mathfrak{B}$ *gelten bei einer p-gekoppelten* A^{V}*-Annäherung des Punktpaares* $\{z_1, z_2, t_1, t_2\} \to \{0, a_2, 0, b_2\}$ *die in* (6. 4) *bzw.* (6. 5) *für* $f(z_1, z_2; t_1, t_2)$ *angegebenen Limesrelationen.*

Tomsk, Forschungsinstitut f. Mathematik u. Mechanik.

---

54) Mit c_k werden wieder von n und $\{Z_1, Z_2\}$ unabhängige Konstanten bezeichnet.

Eingegangen 11. März 1934.